DYSKUSJE

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXVI / 2000, s. 100–110*

Krzysztof WÓJTOWICZ

KILKA UWAG NA TEMAT ZAGADNIENIA „CZAS A MATEMATYKA”

Tematem tegorocznej VI Krakowskiej Konferencji Metodologicznej był czas. Jedna z dyskusji dotyczyła problemu „czas w matematyce”. Ten tekst stanowi (nieco uporządkowany i przeredagowany) zapis głosu w tej dyskusji. Z tego powodu ma on charakter luźnej wypowiedzi, eseju — a nie rozprawy. Chodzi w nim przede wszystkim o postawienie pewnych pytań, nie zaś o wyczerpującą analizę, czy udzielenie konkluzywnych odpowiedzi. Aby sprowokować do dyskusji, interesujące — moim zdaniem — pytania będą często stawiane w formie tez. Z uwagi na swobodny charakter tekstu rezygnuję z zamieszczania uwag bibliograficznych.

W dyskusji na temat stosunku między czasem, a matematyką, można wyróżnić dwa zasadnicze aspekty:

Problem 1. Czas a matematyka: Jakie znaczenie dla rozwoju matematyki ma nasze przeżywanie czasu i rozumienie zagadnienia czasu?

Problem 2. Matematyka a czas: Jak matematyka wpływa na rozumienie zagadnienia czasu?

1. CZAS A MATEMATYKA

Problem ten rozpada się na dwa podproblemy:

(1a) Rozumienie (przeżywanie) czasu a psychologiczne mechanizmy związane z tworzeniem matematyki.

Jest to problem epistemologiczny, dotyczący źródeł wiedzy matematycznej i ich związku z naszą percepcją (intuicją, przeżywaniem) czasu. W myśl stanowiska kantowskiego, kategorie czasu i przestrzeni są zasadnicze dla naszego poznania i je warunkują. Matematyka wyrastać ma z tych właśnie

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

intuicji. Nasz matematyczny aparat pojęciowy ukształtowany jest tak, a nie inaczej m.in. ze względu na posiadanie przez nas intuicji czasu (np: pojęcie *continuum* może powstać tylko dzięki przeżyciu czasu). W myśl takiego stanowiska posiadanie intuicji czasu jest warunkiem koniecznym możliwości tworzenia przez nas pojęć matematycznych[1]. Teza ta jest oczywiście trudna do udowodnienia — trudno wyobrazić sobie jakiekolwiek *experimentum crucis*, nie wiadomo bowiem, jaka byłaby matematyka istoty, która nie dysponuje pojęciem czasu. Na ten temat można więc co najwyżej stawiać spekulatywne hipotezy. W analizie problemu: na ile intuicja czasu[2] warunkuje rozwój pojęć matematycznych; na ile posiadanie takiej intuicji jest warunkiem koniecznym tworzenia takich czy innych pojęć matematycznych, stanowiska mogą się wahać pomiędzy dwiema (jawnie fałszywymi) skrajnościami:

(i) Bez intuicji czasu nie bylibyśmy w ogóle w stanie uprawiać jakiejkolwiek matematyki.

(ii) Posiadanie przez nas intuicji czasu nie ma żadnego znaczenia dla postaci uprawianej przez nas matematyki — matematyka powstałaby w identycznej postaci także wtedy, gdybyśmy nie postrzegali świata w kategoriach czasowych.

Najbliższe prawdy jest z pewnością stanowisko pośrednie: postrzeganie świata w kategoriach czasowych umożliwia (i warunkuje) tworzenie pewnych pojęć matematycznych, istnieją jednak też takie pojęcia matematyczne, które mogą powstać w sposób niezależny od naszego rozumienia (postrzegania?) czasu. Oczywiście, w tak nieprecyzyjnej postaci stanowisko to jest nie do obalenia (i tym samym nie dostarcza żadnych istotnych informacji).

(1b) Rola formalnego opisu i reprezentacji zjawisk czasowych w rozwoju matematyki.

Nauki empiryczne poszukują języka i narzędzi dla opisywania zjawisk, które rozgrywają się w czasie: procesów fizycznych, biologicznych, ekonomicznych, społecznych, *etc.* Matematyka dostarcza takich narzędzi. Rozwój matematyki jest stymulowany problematyką czasu w sposób pośredni, podobnie jak jest stymulowany potrzebą opisania zjawisk fizycznych (biologicznych, ekonomicznych, społecznych).

Matematyka dostarcza zatem pojęć dla konceptualizacji czasu, i – w zależności od potrzeb — pojęcia te mogą bardzo różnić się między sobą[3].

[1] Nie jest moim celem historyczna rekonstrukcja stanowiska Kanta — chodzi mi jedynie o wskazanie pewnego punktu widzenia, zbliżonego do stanowiska Kanta.

[2] Nie precyzuję pojęcia „intuicji czasu" — posługuję się nim tutaj w potocznym sensie.

[3] Oto przykłady:

Jednak matematyka dostarcza nie tylko narzędzi dla opisu zjawisk rozgrywających się w czasie — także dla zjawisk o charakterystyce przestrzennej, kombinatorycznej, ilościowej, *etc.* Pojawia się tu pytanie, jaka jest (matematyczna) specyfika narzędzi tworzonych dla opisu zjawisk rozgrywających się w czasie. Problem ten zostanie podjęty w dalszej części artykułu.

2. MATEMATYKA A CZAS

Jaka jest relacja pomiędzy wiedzą matematyczną, a naszą wiedzą dotyczącą czasu? Czy wiedza matematyczna dotyczy czasu, w szczególności: czy sama matematyka udziela odpowiedzi na pytania dotyczące czasu?

Ktoś, kogo interesuje problem „co to jest czas i jaki jest on naprawdę” nie powinien oczekiwać odpowiedzi od matematyka. Matematyka nie rozstrzyga bowiem problemów dotyczących czasu, nie stawia hipotez na temat czasu. Dostarcza jedynie (silnych i różnorodnych) narzędzi do opisu czasu (czy raczej: do opisu zjawisk rozgrywających się w czasie)[4]. Natomiast wybór, które z tych narzędzi jest najlepsze, najskuteczniejsze nie należy do matematyki jako takiej.

Nie podejmuję tu problemu matematyczności przyrody — problemu, dlaczego świat daje się tak skutecznie opisywać w kategoriach matematycznych. W szczególności nie rozważam zagadnienia, na ile fakt, że matematyka dostarcza narzędzi do opisu świata fizycznego świadczy o tym, że jest jakiś świat matematyczny, którego struktura w jakiś sposób odzwierciedla strukturę świata fizycznego. Użycie przeze mnie terminu „narzędzia” nie ma też sugerować, że opowiadam się za stanowiskiem instrumentalistycznym. Chcę natomiast zwrócić uwagę na fakt, że problematyka czasu nie jest — w gruncie rzeczy — w żaden szczególny sposób wyróżniona. Matematyka dostarcza narzędzi dla opisu zjawisk dziejących się w czasie, ale także zjawisk,

---

(i) Procesy dynamiczne z czasem ciągłym (równania różniczkowe) i czasem dyskretnym (równania różnicowe).

(ii) Równania różniczkowe cząstkowe opisujące zjawiska zmieniające się w czasie (np. równanie dyfuzji, równanie struny drgającej i wiele innych).

(iii) Procesy stochastyczne z czasem ciągłym lub dyskretnym.

(iv) Narzędzia geometrii różniczkowej pozwalającej na zdefiniowanie i opisanie pojęcia czasu w rozumieniu ogólnej teorii względności.

(v) Problematyka złożoności obliczeniowej, gdzie czas jest dyskretny.

[4] Nie podejmuję tu zagadnienia, czy opis czasu i opis zjawisk rozgrywających się w czasie (np. procesów fizycznych) to jedno i to samo. Wydaje się, że nie — bezpośredni dostęp mamy bowiem do zjawisk, a nie do czasu. Z tego punktu widzenia mówienie o „opisie czasu” jest jedynie *façon de parler*: chodzi bowiem zawsze o opis zjawisk ujmowanych w kategoriach czasowych.

w których ten parametr czasowy nie jest istotny. Równanie przewodnictwa cieplnego opisuje zjawisko zmienne w czasie, zaś równanie Poissona[5], opisujące np. potencjał pola elektrostatycznego albo stan równowagi cieplnej — zjawisko stacjonarne w czasie.

Wykorzystując metody procesów stochastycznych — czyli takich, w których występuje pewien parametr t, interpretowany zazwyczaj jako czas — można rozwiązywać niektóre stacjonarne zagadnienia z zakresu równań różniczkowych cząstkowych, np. zagadnienie Dirichleta[6]. Czy zasadne jest stwierdzenie, że w tym rozwiązaniu stacjonarnego zagadnienia rolę odegrała problematyka czasu — i w jakim sensie? Oczywiście — w pośredni sposób tak: jeśli uznamy, że teoria procesów stochastycznych powstała jako jeden z efektów badań nad konceptualizacją pojęcia czasu, to jest jasne, że problematyka czasu odegrała tu znaczącą rolę. Jednak rola ta ograniczała się do kontekstu odkrycia, ale nie do kontekstu uzasadniania. Twierdzenia dotyczące procesów stochastycznych byłyby takie same także wówczas, gdyby parametr t nie był interpretowany jako parametr czasowy. Co więcej, gdyby świat był statyczny, niezmienny w czasie, to nadal metody stochastyczne mogłyby zostać zastosowane do rozwiązania zagadnienia Dirichleta. Zmieniłaby się jedynie ich interpretacja — nie mówilibyśmy już o „momencie dojścia" do brzegu. Jednak twierdzenie, mówiące, iż $u(x) = E^x f(X_\Delta)$, byłoby nadal prawdziwe, niezależnie od tego, czy parametr $t \in \mathbf{R}$, interpretujemy jako czas, czy w jakikolwiek inny sposób[7].

[5]Równanie przewodnictwa cieplnego ma ogólną postać: $\partial^2 u/\partial x_1^2 + ... + \partial^2 u/\partial x_n^2 - \partial u/\partial t = f(x,t)$, (gdzie $x \in \Delta \subset \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, $u(x,t)$ jest funkcją opisującą rozkład temperatury, f jest funkcją opisującą zewnętrzne źródła ciepła). Równanie Poissona ma ogólną postać: $\partial^2 u/\partial x_1^2 + ... + \partial^2 u/\partial x_n^2 = f(x)$ (gdzie $x \in \Delta \subset \mathbf{R}^n$).

[6]Zagadnienie Dirichleta ma następującą postać: rozważmy obszar $\Delta \subset \mathbf{R}^n$, na którego brzegu $\partial\Delta$ zadana jest ciągła funkcja f. Należy znaleźć funkcję $u \in C(\Delta \cup \partial\Delta) \cap C^2(\Delta)$ (tj. ciągłą w domknięciu obszaru Δ, dwukrotnie różniczkowalną na Δ) taką, że $Lu = 0$ na obszarze Δ, gdzie L jest pewnym eliptycznym operatorem różniczkowym.

Rozwiązanie tego zagadnienia jest zadane wzorem: $u(x) = E^x f(X_\Delta)$, gdzie $\{X_t : t \geq 0\}$ jest pewnym procesem stochastycznym związanym z operatorem L (startującym z punktu x), zaś $\tau\Delta$ jest czasem wyjścia z obszaru Δ. W szczególnym przypadku, gdy operatorem L jest operator Laplace'a, zagadnienie Dirichleta przyjmuje postać: znaleźć funkcję harmoniczną, tj. spełniającą równanie Laplace'a: $\partial^2 u/\partial x_1^2 + ... + \partial^2 u/\partial x_n^2 = 0$ w obszarze $\Delta \subset \mathbf{R}^n$, gdzie wartość funkcji $u(x)$ na brzegu $\Gamma = \partial\Delta$ obszaru Δ, zadana jest poprzez funkcję $f(x)$. Rozwiązanie jest zadane wzorem $u(x) = E^x f(W_\Delta)$, gdzie $\{W_t : t \geq 0\}$ jest procesem Wienera startującym z punktu x. Intuicyjnie: aby obliczyć wartość funkcji $u(x)$ w punkcie x ($x \in \mathbf{R}^n$), wypuszczamy z punktu x proces Wienera i obliczamy jego średnią wartość w momencie dojścia do brzegu obszaru

[7]Nie podejmuję tu (spekulatywnego) zagadnienia, czy teoria procesów stochastycznych mogłaby w ogóle powstać, gdyby — mówiąc swobodnie — nie było czasu. Jeśli

Czy można jednak podać istotny argument, który wskazuje na to, że równanie przewodnictwa cieplnego jest w jakimś «głębokim» sensie różne od równania Poissona? Oczywiście, są to równania różnego typu — w równaniu przewodnictwa cieplnego występuje zmienna t, w równaniu Poissona takiej zmiennej nie ma. Pomiędzy tymi równaniami występują różnice techniczne, równania te mogą być rozwiązywane i opisywane innymi technikami, inne są klasy rozwiązań, *etc.* Jednak fakt, że zmienną t w równaniu przewodnictwa cieplnego interpretujemy jako czas, nie ma żadnego wpływu na to, jakie to równanie ma rozwiązania, czy jakimi technikami się je uzyskuje. Na poziomie matematycznego opisu równania przewodnictwa cieplnego, nazywanie parametru t „czasem" ma jedynie znaczenie heurystyczne (dydaktyczne) — łatwiej nam sobie wyobrażać, jakie intuicje leżą u podłoża tego równania, jaka jest jego geneza, jaką sytuację fizyczną może opisać. Dzięki takim inspiracjom mogą powstawać nowe idee, nowe pomysły techniczne, czy definicje nowych pojęć. Jednak równanie to wprawdzie może opisywać pewną sytuacją fizyczną — ale dla samego rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego (lub dla jego jakościowego opisu) nie jest konieczne przekonanie, iż opisuje ono jakieś zjawisko rozgrywające się w czasie.

Na temat czasu matematyka dostarcza jedynie informacji o charakterze warunkowym: jeśli to, co nazywamy „czasem" spełnia warunki Φ, to spełnia również warunek φ. Oczywiście, «w tle» jest pewna teoria matematyczna T, która umożliwia ustalenie, że pomiędzy warunkami Φ, a warunkiem φ zachodzi pewien związek. Zdania Φ oraz φ muszą być sformułowane w tym samym języku J. Zazwyczaj są to zdania sformułowane w kontekście pewnej teorii matematycznej T. Informacje, jakie mamy do dyspozycji (dzięki teorii T wraz z towarzyszącym jej aparatem dedukcyjnym, opisanym np. przez operator konsekwencji Cn), mają następujący charakter: w ramach teorii T, jeśli dodatkowo założymy Φ, to otrzymamy wniosek φ ($\varphi \in Cn(T + \Phi)$).

Wybór, jaki aparat (tzn: jaka «teoria tła» T) jest dobry z punktu widzenia potrzeb danej nauki, należy do naukowca. Jest to jednak zjawisko ogólne, nie jest ono specyficznie charakterystyczne dla problematyki czasu. Podam tu kilka przykładów, ilustrujących to ogólne zjawisko:

(i) Jeśli dla opisu zjawisk potrzebny jest czas typu $\mathbf{R}$ — np. w teorii układów dynamicznych — to matematyka dostarcza narzędzi (wykorzystu-

uznamy, że zmiana jest nierozerwalnie związana z upływem czasu (a to założenie wydaje się być naturalne), to przy braku zmian, potrzeby fizyki byłyby zapewne inne. Ważne jest natomiast to, że (stacjonarne w czasie) zagadnienie daje się rozwiązać przy użyciu metod stochastycznych, dotyczących zjawisk zmiennych w czasie.

jemy pewną teorię matematyczną T_1, w ramach której opisać można liczby rzeczywiste i «uprawiać» teorię układów dynamicznych).

(ii) Jeśli interesuje nas czas dyskretny (np. przy modelowaniu rozwoju pewnej populacji opisanej równaniem różnicowym), to posługujemy się inną matematyczną teorią T_2.

(iii) Gdyby z pewnych powodów w opisie procesów czasowych istotne okazałyby się zagadnienia typu: „czy istnieje podzbiór $\mathbf{R}$ mocy pomiędzy $\aleph_0$ i *continuum*" to byłby to znak, że matematyka sformalizowana w teorii mnogości ZFC[8]nie stanowi wystarczająco silnego narzędzia dla opisu tych procesów — konieczne byłoby jej wzmocnienie. Jednak wybór, czy należy jako podstawę naszej formalizacji przyjąć teorię ZFC+CH[9], czy np. ZFC+c=$\aleph_{2000}$ nie leżałby w gestii matematyka, ale w gestii badacza (fizyka, biologa, psychologa, ekonomisty, etc)[10]. Matematyk — mówiąc obrazowo — jedynie realizowałby zamówienie badacza na teorię o pewnych własnościach. (Nie sugeruję tu oczywiście, że faktycznie aparat matematyczny jest rozwijany tylko przez matematyków, zaś przedstawiciele nauk empirycznych są jego biernymi konsumentami. Często badacz sam jest matematykiem, i sam konstruuje swoje narzędzia. Chodzi tutaj tylko o wskazanie pewnego mechanizmu.)

(iv) Gdyby w jakiejś teorii okazało się, że własności czasu (czy procesów dziejących się w czasie) dobrze opisuje analiza niestandardowa, to nic nie stałoby na przeszkodzie, aby nią właśnie się posłużyć. Wtedy czas, z jakim mielibyśmy do czynienia miałby zupełnie inny charakter niż czas modelowany za pomocą standardowych liczb rzeczywistych.

(v) Jeśli w teorii fizycznej mówilibyśmy tylko o punktach czasowych, to odpowiednia teoria mogłaby być słabsza od teorii, w której mówilibyśmy również o zbiorach punktów czasowych. Z kolei, gdybyśmy chcieli oprócz pojęcia „czasu", wprowadzić także pojęcie „możliwych czasów" (tj. możliwych modelach dla naszej teorii czasu), to konieczne byłoby odwołanie się do środków metateoretycznych. Taka sytuacja jest możliwa wtedy, gdy mamy teorię czasu T, która nie jest kategoryczna, i z jakiegoś powodu nie potrafimy wskazać modelu zamierzonego (ale jedynie pewną klasę modeli dopuszczalnych z punktu widzenia naszej teorii — np. takich modeli, które

[8]Teoria mnogości Zermelo–Fraenkla. Jest to teoria, w ramach której można zrekonstruować w zasadzie wszystkie pojęcia i twierdzenia klasycznej matematyki.

[9]Przez CH oznaczamy hipotezę *continuum*, w myśl której c=$\aleph_1$, a więc nie istnieje podzbiór $\mathbf{R}$ mocy pośredniej pomiędzy $\aleph_0$ a mocą *continuum*. CH jest niezależna od ZFC.

[10]Osobiście nie sądzę, aby właśnie problem *continuum* miał odegrać istotną rolę w zastosowaniach, jednak sytuacji tej nie można *a priori* wykluczyć.

mają sens fizyczny). Wtedy istotna jest wiedza na temat tego, jak wyglądają te modele. Nie wystarczy wówczas sformułowanie samej teorii T, opisującej czas — konieczna jest również znajomość metateorii, opisującej klasę modeli dla T. Oczywiście, już samo sformułowanie pojęcia „modelu zamierzonego" czy „dopuszczalnego" wymaga odwołania się do środków wykraczających poza samą teorię.

(vi) Czas dyskretny opisywany przez PA ma inne własności, niż czas dyskretny opisywany przez osłabienia czy wzmocnienia PA. Różnice w sile teorii mogą być empirycznie nieistotne (np. pytania dotyczące deskryptywnej teorii mnogości czy teorii dużych liczb kardynalnych wydają się być mało istotne empirycznie, natomiast pytania dotyczące równań różniczkowych — zazwyczaj są istotne). Nie wszystkie narzędzia matematyczne są ważne z punktu widzenia konceptualizacji problematyki czasu. Teoria układów dynamicznych czy procesów stochastycznych jest ważna[11], ale np. teoria dużych liczb kardynalnych — nie jest.

Jednak matematyk na pytania: „To jaki jest ten czas: standardowy, czy niestandardowy? Czy istnieją niestandardowe, nieskończenie małe odcinki czasu, czy też to pojęcie jest bez sensu i czas raczej przypomina prostą rzeczywistą? Czy czas jest ciągły czy dyskretny? Czy jest gęsty? Czy ma luki? Czy płynie zawsze z taką samą prędkością?" odpowie jedynie: „Nie wiem, szanowni teoretycy czasu, wybór należy do was. Ja w mojej teorii w ogóle nie badam czegoś takiego jak czas. Ja badam jedynie np. półgrupy operatorów parametryzowane dodatnimi liczbami rzeczywistymi, albo równania różniczkowe, zależne od parametru t, albo dyskretne procesy Markowa, indeksowane liczbami naturalnymi. Dla wygody i z powodów heurystycznych (a niekiedy dydaktycznych) nazywam niekiedy badany parametr «czasem». Wtedy mogę ilustrować dany proces jakimś zjawiskiem fizycznym rozgrywającym się w czasie, np. proces Wienera traktuję jako matematyczną reprezentację ruchu Browna (i odwrotnie: ruch Browna stanowi fizyczną, poglądową ilustrację trójwymiarowego procesu Wienera). Pewne równanie różniczkowe interpretuję jako opis ogrzewanego pręta, dzięki czemu fizyczny problem ogrzewanego pręta stanowi ilustrację dla badanego przez mnie równania, *etc.* Nie wiem jednak, czy ten «czas», z jakim mam do czynienia w moich równaniach, ma cokolwiek wspólnego z tym, co wy rozumiecie pod pojęciem «czas». Nie zastanawiam się nad tym — to jest wasze zadanie."

[11]A także np. teoria złożoności obliczeniowej, teoria równań różniczkowych cząstkowych, teoria półgrup operatorów liniowych, geometria różniczkowa i wiele innych.

To, jakie własności będzie miał nasz „czas” reprezentowany w teorii matematycznej zależy zarówno od tego, jakie mu bezpośrednio przypiszemy własności, jak i od tego, jak wygląda matematyczna teoria, w ramach której reprezentujemy interesujące nas zjawiska. Jeśli opis zjawisk sformułowany jest w języku J, i raz posługujemy się matematyczną teorią T_1, a innym razem teorią T_2, to może się zdarzyć, że przy dodatkowych założeniach Φ dotyczących struktury czasu, otrzymamy różne wnioski dotyczące czasu: może istnieć zdanie φ, dotyczące czasu takie, że $\varphi \in Cn(T_1 + \Phi)$, ale $\varphi \notin Cn(T_2 + \Phi)$. Może też zdarzyć się, że $\neg\varphi \in Cn(T_2 + \Phi)$.

Matematyka jest reprezentowana w ramach ZFC — wszystkie obiekty matematyczne «podlegają prawom ZFC». Może to prowadzić do wrażenia, że to właśnie matematyka opisuje czas, że to matematyka (utożsamiana z ZFC) sama z siebie dostarcza informacji na temat czasu. Przy takiej interpretacji stwierdzenie, że $\varphi \in Cn(\mathrm{ZFC}+\Phi)$ oznacza, że to φ jest zdaniem prawdziwym na temat czasu — i że źródłem tej wiedzy jest matematyka jako taka. Jednak wiedza ta ma charakter czysto warunkowy. Może się zdarzyć, że wprawdzie $\varphi \in \mathrm{Cn}(\mathrm{ZFC}+\Phi)$, ale $\varphi \notin Cn(\mathrm{ZF}+\Phi)$, natomiast $\neg\varphi \in Cn(\mathrm{ZF}+\mathrm{AD}+\Phi)$[12]. Może też być tak, że dla innych założeń dodatkowych Φ_1 zachodzi $\varphi \notin Cn(\mathrm{ZFC}+\Phi_1)$, albo $\neg\varphi \in Cn(\mathrm{ZFC}+\Phi_1)$; dla jeszcze innych założeń Φ_2, φ może być niezależne od ZFC+Φ_2, *etc.* Sama matematyka nie daje natomiast odpowiedzi, umożliwia jedynie ustalenie i zrozumienie warunkowych zależności logicznych i pojęciowych.

3. WNIOSKI

1. Problematyka czasu ma dwojakie znaczenie dla rozwoju matematyki:

(a) Posiadanie przez nas intuicji czasu jest istotne dla kształtowania się aparatu pojęciowego i rozwoju matematyki. Wydaje się to być dość oczywiste. Z drugiej jednak strony trudno podać konkluzywny argument, iż posiadanie takiej intuicji jest koniecznym warunkiem stworzenia takiej a nie innej matematyki. Teza, iż „gdybyśmy nie posiadali takiej kategorii, jak «czas», nie powstałaby nigdy teoria matematyczna T” jest: po pierwsze — czysto spekulatywna; po drugie — bardzo wątpliwa (trudno nawet chyba byłoby wskazać przykład teorii matematycznej T, która nie miałaby szansy powstać bez odwoływania się do pojęcia czasu). Nie jest np. wcale oczywiste, gdzie (i czy w ogóle) w aksjomatach teorii mnogości ZFC «implementowany» jest czas. Można przecież traktować teorię ZFC jako opis pewnego

[12] AD jest aksjomatem determinacji (jest to aksjomat sprzeczny z AC).

«statycznego» uniwersum zbiorów (w ramach którego można oczywiście zrekonstruować np. teorię liczb rzeczywistych, teorię układów dynamicznych, czy teorię procesów stochastycznych przydatnych w opisie zjawisk czasowych). Jednak sama ZFC jest statyczna, «aczasowa». Jeśli więc zgodzimy się, że ZFC mogłaby powstać także w krainie «bezczasowców»[13], to można co najwyżej twierdzić, że dla nas — «czasowców» — bardziej interesujące są niektóre fragmenty uniwersum mnogościowego (te fragmenty, gdzie można modelować pewne dynamiczne procesy) zaś dla «bezczasowców» — inne, lepiej opisujące ich statyczny świat.

(b) Fizyczny opis zjawisk rozgrywających się w czasie ma pośrednie znaczenie dla rozwoju matematyki: matematyka szuka narzędzi, przez co stawia sobie pewne pytania i to określa pewne kierunki badań. Problematyka czasu ma więc znaczenie inspirujące (tak jak inspirujące znaczenie mają problemy fizyczne, ekonomiczne, inżynierskie) i jest niewątpliwie bardzo istotna w kontekście odkrycia.

2. Matematyka odgrywa zasadniczą rolę w rozumieniu problematyki czasu, tak jak odgrywa zasadniczą rolę w rozumieniu wszelkich zjawisk fizycznych (i ogólniej: w opisie świata). Jednak *sama* matematyka nie mówi nic o czasie, tak jak *sama* matematyka nie mówi nic o jakimkolwiek zjawisku fizycznym (czy biologicznym, do opisu którego została użyta). Dostarcza nam natomiast wiedzy o charakterze warunkowym, oraz narzędzi przydatnych w opisie zjawisk. „Czas” nie jest kategorią matematyczną — może być natomiast formalnie reprezentowany i opisywany w teorii matematycznej. Problem reprezentacji czasu w matematyce jest interesujący z formalnego punktu widzenia, natomiast — z filozoficznego punktu widzenia — nie jest istotnie różny od ogólnego problemu reprezentowania zjawisk w ramach teorii matematycznych i posługiwania się instrumentarium matematycznym w charakterze narzędzia opisu.

[13] Przykład «bezczasowców» zaczerpnąłem z wykładu prof. dr hab. Andrzeja Lasoty „*Czas jako element struktury współczesnej matematyki*”, wygłoszonym na tegorocznej, VI Krakowskiej Konferencji Metodologicznej.