ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXV / 1999, s. 61–75*

Jerzy DADACZYŃSKI

AKCEPTACJA NIESKOŃCZONOŚCI AKTUALNEJ U ŚW. AUGUSTYNA

Zasadnicza postawa myślicieli starożytnych wobec nieskończoności została ostatecznie ukształtowana w czwartym wieku p.n.e. Decydujący wpływ na poglądy starożytnych odnośnie do nieskończoności miały znane aporie Zenona. Aporie te, obok warstwy fizykalnej, miały swój aspekt matematyczny czy nawet teoriomnogościowy. W tej warstwie aporie okazały się paradoksalne. Działo się tak dlatego, że wnioski, które można było wyciągnąć z niektórych aporii Zenona, kłóciły się z przyjętą zasadą matematyczną z zakresu aksjomatyki wielkości, która stwierdzała, że „część jest mniejsza od całości". Zdaniem myślicieli starożytnych przyczyną paradoksów było przyjmowanie istnienia wielkości nieskończonych. Używając o wiele późniejszego języka teoriomnogościowego, trzeba by powiedzieć, że paradoksy ujawniały się w związku z posługiwaniem się w dyskusjach toczonych wokół aporii zbiorami nieskończonymi. Oczywiście trzeba pamiętać, że w epoce antycznej nie zdawano sobie jeszcze w istocie sprawy z wagi pojęcia zbioru dla ufundowania podstaw matematyki, w istocie nie posługiwano się *explicite* tym pojęciem. Tym niemniej to właśnie zbiory nieskończone „zachowywały" się inaczej niż wskazywałby na to „dogmat" starożytnej matematyki i równocześnie filozofii[1].

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Należałoby w tym miejscu doprecyzować terminologię i odpowiedzieć na pytanie, co oznacza termin „zbiór", który wielokrotnie przewija się w niniejszym artykule. Nie jest to jednak zadanie łatwe. Jest to termin teoriomnogościowy, który w większości aksjomatyk teorii mnogości jest pojęciem pierwotnym, nie definiowanym. Tak dzieje się w tych ujęciach teorii mnogości, w których przyjmuje się, że wszystkie przedmioty, o których mowa w tych systemach, są zbiorami. Tam definicję uwikłaną pojęcia zbioru stanowi aksjomatyka. Natomiast w systemie E. Zermelo, który to system był pierwszą próbą aksjomatyzacji teorii mnogości, przedmioty, o których mowa w tym systemie, mogą być zbiorami lub indywiduami, to znaczy przedmiotami nie będącymi zbiorami. Można wów-

W związku z paradoksami nieskończoności zaczął się w starożytności ujawniać „lęk przed nieskończonością”. Rozwiązaniem była rezygnacja z posługiwania się wielkościami czy zbiorami nieskończonymi, w dociekaniach matematyki i filozofii. Więcej, odmówiono możliwości istnienia takim wielkościom, zbiorom.

Negacja nieskończoności znalazła swoje zwieńczenie w koncepcji Arystotelesa. Stagiryta zdecydował się na wprowadzenie dychotomii: nieskończoności potencjalnej oraz nieskończoności aktualnej. Nie została jednak podana definicja żadnego z tych typów wielkości, natomiast przedstawione zostały jedynie pewne ich paradygmaty. I tak wzorcem nieskończoności potencjalnej stał się rosnący ciąg (w istocie nieskończony) liczb naturalnych. Taki ciąg nie był ograniczony. Jednakże dla każdego indeksu wartość ciągu była wielkością skończoną. Natomiast paradygmatem nieskończoności aktualnej był zbiór wszystkich liczb naturalnych „danych niejako na raz”.

Arystoteles zgodził się na istnienie nieskończoności potencjalnej, natomiast odrzucił on istnienie nieskończoności aktualnej. Ta bowiem, gwałcąc zasadę „część jest mniejsza od całości”, generowała paradoksy, ujawniające się w dyskusji niektórych aporii Zenona.

Tak więc w podziale i rozstrzygnięciu Arystotelesa ujawnił się zdecydowanie starożytny „lęk przed nieskończonością”. Od tego momentu filozofia starożytna stała się w istocie filozofią finistyczną.

Rozwiązanie Arystotelesa przetrwało przez wiele wieków w dziejach myśli europejskiej jako klasyczne. Prezentuje się często uproszczoną opinię, że stanowisko wobec nieskończoności zostało zmienione dopiero w dziewiętnastym wieku przez B. Bolzano, G. Cantora oraz R. Dedekinda. Ci uczeni

---

czas zdefiniować predykat „Z” („... jest zbiorem”) przy pomocy terminów pierwotnych „$\in$” („należy”), „$\emptyset$„ („zbiór pusty”), w następujący sposób:

$$Z(x) \equiv (x = \emptyset \vee \sum_{y} y \in x).$$

Uwagi te jednak odnoszą się do znaczeń terminu „zbiór” w zaksjomatyzowanych teoriach mnogości. Pierwsza taka teoria, autorstwa właśnie E. Zermelo, powstała dopiero na początku dwudziestego wieku. Wcześniej natomiast, jeśli już mówiono *explicite* o zbiorach, to posługiwano się jedynie pewnymi intuicjami, które nie mogą być traktowane jako ścisłe definicje. I tak powiadano, że zbiór to pewna wielość, która tworzy „gotową” całość, albo że zbiór to jakaś jedność wielości. Czasami uważano, że zbiór to coś, o czym niesprzecznie da się pomyśleć jako o pewnej jedności. Jest oczywiste, że te określenia są bardzo nieprecyzyjne, wieloznaczne. Ponieważ jednak artykuł dotyczy czasów, kiedy posługiwano się jedynie takimi nieprecyzyjnymi, intuicyjnymi określeniami, dlatego tylko te intuicyjne określenia można wiązać z terminem „zbiór” występującym w niniejszym tekście.

podali definicje zbiorów nieskończonych i opowiedzieli się — wbrew dotychczasowej tradycji — za istnieniem nieskończoności aktualnej (zbiorów nieskończonych).

Twórcy teorii mnogości w dziewiętnastym wieku, choć była to jeszcze teoria przedaksjomatyczna, zdawali sobie sprawę z tego, że istnienie zbiorów nieskończonych trzeba w niej będzie wprowadzić przy pomocy aksjomatu[2]. Na różnych płaszczyznach starali się jednak potwierdzić prawdziwość (semantyczną) takiego aksjomatu.

I tak R. Dedekind uważał, że aksjomat nieskończoności da się uzasadnić, wprowadzając do rozważań „świat myśli" (*Gedankenwelt*) jako zbiór[3]. Natomiast G. Cantor używał trojakiego rodzaju przesłanek, z których dwie pierwsze określał sam jako argumenty *a priori* i *a posteriori*:

1. (*a priori*) pojęcie Boga wskazuje na możliwość i konieczność stworzenia przez niego wielkości pozaskończonych (*transfinitum*)[4];

2. (*a posteriori*) przyjęcie istnienia *transfinitum* pozwoli na doskonalsze tłumaczenie zjawisk przyrodniczych i psychicznych[5];

3. (argument z praktyki matematycznej) dla skonstruowania modelu liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych konieczne jest przyjęcie istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych (ciągów podstawowych liczb wymiernych). Ponieważ liczby rzeczywiste są już „dobrze zadomowione" w matematyce, zatem należy przyjąć istnienie zbiorów aktualnie nieskończonych[6].

Oczywiście, tego typu argumenty nie mogły z punktu widzenia metodologii matematyki stanowić dowodów aksjomatu nieskończoności. Między innymi dlatego, że odwoływały się do danych ontologicznych, teologicznych,

---

[2]Por. H. Wang, *From Philosophy to Mathematics*, London 1974, s. 212.

[3]Por. N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, tłum. z franc. S. Dobrzycki, Warszawa 1980, s. 43.

[4] „Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit der tatsächtlich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum." G. Cantor, Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932, reprint Berlin, Heidelberg, New York 1980, s. 400 (378–439).

[5] „Ein anderer Beweis zeigt a posteriori, daß die Annahme eines Transfinitum in natura naturata eine besondere, weil vollkommenere Erklärung der Phänomene, im besondern der Organismen und der psychischen Erscheinungen ermöglicht als die entgegengesetzte Hypothese..." tamże.

[6] „...selbst die *endlichen* Irrationalzahlen ohne *entscheidende* Heranziehung aktualendlicher Mengen wissenschaftlich streng nicht zu begründen sind." tamże, s.383.

pragmatycznych. Dodatkowo w niektórych rozumowaniach stosowano schemat wnioskowania redukcyjnego.

Tym niemniej tego rodzaju argumenty posiadały pewną wartość heurystyczną, a także stanowiły narzędzie w dyskusji, która wywiązała się w związku z wprowadzeniem zbiorów nieskończonych do matematyki dziewiętnastego wieku. Oponentem G. Cantora i R. Dedekinda, a także wspierającego ich swoim autorytetem K. Weierstrassa było środowisko skupione wokół berlińskiego profesora matematyki, L. Kroneckera.

W ostrej dyskusji, w której odwoływano się do racji matematycznych, filozoficznych, a także teologicznych G. Cantor znalazł jeszcze jeden sposób potwierdzenia słuszności posługiwania się zbiorami nieskończonymi w matematyce. Przestudiował on w miarę dokładnie klasyków filozofii. I co interesujące, odnalazł kilku wybitnych filozofów, którzy wbrew tradycji arystotelesowskiej, wbrew „lękowi przed nieskończonością", akceptowali — przynajmniej w jakiejś formie — istnienie nieskończoności aktualnej. Wśród autorytetów łamiących arystotelesowski „dogmat", znalazł się między innymi św. Augustyn.

G. Cantor powołał się na dziewiętnasty rozdział dwunastej księgi monumentalnego dzieła „O państwie Bożym" biskupa Hippony[7]. Cel tego odwołania był w istocie dwojaki. Niemiecki matematyk starał się w doktrynie św. Augustyna znaleźć potwierdzenie reprezentowanego przez siebie stanowiska platońskiego, według którego liczbom przysługuje najwyższy stopień realności, ponieważ są one ideami. Drugą przyczyną było właśnie poszukiwanie autorytetów potwierdzających istnienie nieskończoności aktualnej[8].

Dalsze kroki badawcze będą polegały na analizie wskazanego przez G. Cantora tekstu św. Augustyna, po to, by ujawnić prezentowaną przez biskupa Hippony koncepcję nieskończoności.

[7]Tytuł tego rozdziału brzmi: „Przeciw tym, którzy twierdzą, że nieskończoności nie może objąć nawet wiedza Boża" (*Contra eos, qui dicunt ea, quae infinita sunt, nec Dei posse scientia comprehendi*), por. św. Augustyn, *O państwie Bożym. Przeciw poganom ksiąg XXII*, tłum. z łac. i oprac. W. Kornatowski, Warszawa, 1977.

[8]„Gestatten Sie mir dazu zu bemerken, daß mir die Realität der ganzen Zahlen eine *viel stärkere* zu sein scheint als die der Sinnenwelt. Und daß es sich so verhält, hat einen einzigen, sehr einfachen Grund, nämlich diesen, daß die ganzen Zahlen sowohl getrennt wie auch in ihrer actual unendlichen Totalität als ewige Ideen in Intellectu Divino im höchsten Grade der Realität existieren... Viel später habe ich gesehen, daß im wesentlichen derselbe Gedanke vom hl. Augustin in dem Werke De civitate Dei lib. XII, cap. 19 (contra eos, qui dicunt ea, quae infinita sunt, nec Dei posse scientia comprehendi) vorkommt." G. Cantor, List do C.Hermite z 30.11.1895, w: H. Meschkowski, *Problem des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig 1967, s. 262–263.

Należy jednak najpierw ukazać kontekst, w jakim była osadzona wypowiedź św. Augustyna, dotycząca nieskończoności. Otóż biskup z Hippony podjął polemikę z filozofami niechrześcijańskimi, którzy twierdzili, że historia wszechświata powtarza się cyklicznie[9]. Zdaniem św. Augustyna, dzieje wszechświata posiadają — zgodnie z nauczaniem biblijnym — charakter linearny. Aby przeciwstawić się tezie pogańskiej, przedstawia on najpierw sposób argumentacji swoich przeciwników.

Podstawową ich przesłanką było przekonanie, że:

(1) żadna wiedza nie może objąć czegoś nieskończonego[10].

W tej właśnie tezie przejawia się sygnalizowany wcześniej, typowy dla myśli starożytnej, „lęk przed nieskończonością".

W rozumowanie były również uwikłane dwie przesłanki, które nie zostały w tym miejscu dość jasno zaprezentowane przez św. Augustyna. Chodzi o to, że Bóg działa zawsze rozumnie. Czyli:

(2) Bóg czyni tylko to, czego zamysł (wiedzę) wcześniej posiada[11].

Oraz:

(3) Bóg jest stwórcą wszystkiego.

Z powyższych trzech założeń wynika, że:

(4) Bóg, który jest stwórcą wszystkiego, ma w sobie (w swojej wiedzy) skończoną liczbę wszystkich skończonych zamysłów wszystkich skończonych rzeczy, które czyni[12].

W tym miejscu przeciwnicy św. Augustyna powoływali się na kolejną istotną przesłankę:

(5) „...trzeba zaś wierzyć, że Jego [Boga — J.D.] dobroć nigdy nie była bezczynna, gdyż działalność Jego nie mogła się zacząć w czasie, tak iż poprzedzałoby ją odwieczne powstrzymywanie się od działania; wyglądałoby

[9]Św. Augustyn rozpoczął tę polemikę w rozdziale dwunastym księgi XVII *O państwie Bożym*, który nosi znamienny tytuł: „Czego o niezmiennym planie i woli Bożej uczy zdrowa wiara przeciwko wnioskom tych, którzy wierzą, że powtarzane wiecznie dzieła Boże wracają w tych samych zawsze cyklach wieków."

[10]Por. św. Augustyn, *O państwie Bożym*, ks. 12, XVIII, 1.

[11]Nieco dalej to założenie uczynione przez przeciwników św. Augustyna zostało jednak przez niego ujawnione: „jeśli z drugiej strony przypisze Mu [Bogu — J.D.] się wieczne tworzenie rzeczy wprawdzie doczesnych, lecz coraz to innych, tak iż kiedyś doszedł również do stworzenia człowieka, którego przedtem nigdy nie był czynił — to będzie wyglądało, że wszystko, co zdziałał, wynika nie z wiedzy, niezdolnej podług nich do osiągnięcia niczego nieskończonego, lecz z jakichś, kształtujących się tak, jak przychodziło na myśl, przypadkowych i płochych pobudek". tamże.

[12]Por. tamże.

to bowiem, jakby Bóg żałował swej poprzedniej, nie mającej początku bezczynności i dlatego właśnie przystąpił do działania"[13].

Innymi słowy: Bóg działa — stwarzając — odwiecznie. Ponieważ zaś może stworzyć tylko skończoną ilość rzeczy skończonych (posiada bowiem tylko skończoną ilość zamysłów tychże, a stwarza jedynie to, czego zamysł posiada), więc jego odwieczne (nieskończone w czasie) działanie jest tylko wtedy do zaakceptowania, gdy przyjmie się cykliczność stwarzania tych samych rzeczy, a więc cykliczność dziejów[14]. Św. Augustyn tak prezentował ostateczny wniosek swoich przeciwników: „Stąd wynika — wywodzą oni — konieczność ustawicznego powtarzania się tych samych rzeczy i nieustannego przemijania powtarzających się; co zachodzi już to w świecie trwałym w swojej zmienności, który choć istniał zawsze i nie miał początku w czasie — został jednakowoż stworzony, już to wraz ze zjawianiem się i zanikaniem świata, również powtarzanego i skazanego na ciągle trwające powtarzanie się w owych cyklicznych nawrotach. (...) Gdyby bowiem nie powtarzały się te same byty, to ze względu na nieskończoną rozmaitość zmian, nie mogłaby ich objąć żadna wiedza lub przedwiedza Boża"[15].

Widać zatem, że zaprezentowane przez św. Augustyna rozumowanie jego przeciwników, mające uzasadnić cykliczność dziejów wszechświata, oparte było na czterech założeniach [(1), (2), (3), (5)]. Przesłanki (2) i (3), mówiące o rozumności Bożych działań stwórczych oraz o tym, że Bóg jest stwórcą wszystkiego, można zaliczyć z pewnością do tez akceptowalnych z punktu widzenia ortodoksji chrześcijańskiej, której starał się bronić św. Augustyn. Zatem błędny, z jego punktu widzenia, wniosek musiał wynikać albo z jednego z założeń (1) lub (5), albo z obydwu tych założeń. Zdaniem św. Augustyna, do błędnego wniosku prowadziło przyjęcie obydwu wspomnianych przesłanek. Przedstawiona przez niego krytyka założenia (5) nie jest interesująca z punktu widzenia omawianego w tym artykule zagadnienia nieskończoności. Natomiast z pewnością istotna jest jego krytyka założenia (1), stwierdzającego, że nieskończoności nie jest w stanie objąć żadna wiedza. Otóż św. Augustyn stara się uzasadnić, że wiedza Boża jest w stanie objąć i rzeczywiście obejmuje nieskończoność. W rozumowanie to uwikłane jest pewne uzasadnienie istnienia nieskończoności aktualnej.

[13] Por. tamże.

[14] Filozofia przeciwników św. Augustyna nie jest konsekwentnie do końca finistyczna. Przyjmują oni odwieczność stwórczego działania Bożego i nieskończoną liczbę cykli (nieodróżnialnych od siebie nawzajem), z których składają się dzieje.

[15] Por. św. Augustyn, *O państwie Bożym*, ks. 12, XVIII, 1.

Św. Augustyn odwołuje się do dziedziny liczb. Warto w tym miejscu zauważyć, co w starożytności było traktowane jako liczba. Otóż ze zbioru liczb używanych w matematyce dwudziestego wieku za liczby uważano w starożytności jedynie liczby naturalne[16]. Posługiwano się już w starożytności stosunkami liczb naturalnych, które dzisiaj traktowane są po prostu jako podzbiór zbioru liczb wymiernych. Eudoksos w sposób ścisły wprowadził do matematyki starożytnej wielkości niewymierne, które były prototypem liczb niewymiernych. Jednakże ani stosunków liczb naturalnych, ani niewymierności nie uważano w starożytności za liczby. Stało się tak za sprawą pitagorejskiego przekonania, że liczba jest wyłącznie mnogością jedności–monad.

Zatem należy pamiętać, że piszący o liczbach św. Augustyn miał na myśli wyłącznie liczby naturalne. I odnośnie do takich właśnie liczb wysuwa on następujące twierdzenie: „gdy znowuż chodzi o tych, którzy twierdzą, że nieskończoności nie może objąć nawet wiedza Boża, to nie zostaje im nic innego, jak tylko pogrążając się w otchłań głębokiej bezbożności, bezczelnie mówić, że Bóg nie zna wszystkich liczb. Bo jest zupełnie pewne, że liczby są nieskończone”[17].

Św. Augustyn używa więc terminu „nieskończone” odnośnie do liczb naturalnych. Ważne jest w tym miejscu ustalenie, co miał na myśli biskup Hippony, mówiąc o nieskończoności. Innymi słowy: chodzi o to, czy można ustalić, jakim kryterium, czy też jaką definicją nieskończoności się posługiwał.

Uważna analiza tekstu św. Augustyna pozwala na wyodrębnienie takiego kryterium. Pisze on na końcu rozpatrywanego rozdziału: „dlatego też, jeśli wszystko, co ogarnia wiedza, jest ograniczone przez zdolność ogarniania właściwą zdobywającemu wiedzę, to i wszelka nieskończoność jest dla Boga w pewien niewyrażalny sposób ograniczona, ponieważ nie jest czymś nie dającym się ogarnąć przez Jego wiedzę. Jeśli przeto nieskończoność liczb nie może być nieskończona dla wiedzy Bożej, która ją ogarnia, to czymże jesteśmy my marni ludzie, iżbyśmy śmieli ustalać granice tej wiedzy”[18].

---

[16] Należy dodać, że starożytni nie uznawali z zasady „0” jako liczby i dlatego z reguły nie dopisywali go do zbioru liczb naturalnych. Czasami zresztą zbiór liczb naturalnych rozpoczynano od „2”. Bowiem „1” była przez pitagorejczyków traktowana też w sposób szczególny. Uważali oni ją za monadę, z której budowane były wszystkie inne liczby. Jednakże dla uproszczenia rozważań prowadzonych w niniejszym artykule przyjęto założenie, że do liczb naturalnych zaliczają się zarówno „0”, jak i „1”.

[17] Św. Augustyn, dz. cyt., ks. 12, XIX.

[18] Tamże.

Przytoczone rozumowanie św. Augustyna pozwala ustalić, że w jego pojęciu opozycja skończoność — nieskończoność pokrywała się z przeciwstawieniem ograniczoność — nieograniczoność. Skończoność i nieskończoność była pewną cechą zbiorów. Można było mówić, że pewien zbiór jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy dany zbiór był ograniczony w tym znaczeniu, że posiadał on nadzbiór właściwy. I przeciwnie, zbiór był nieskończony wtedy i tylko wtedy, kiedy był on nieograniczony, to znaczy nie istniał żaden jego nadzbiór właściwy.

Istotne jest teraz ustalenie, co miał na myśli św. Augustyn, pisząc, że „liczby są nieskończone". Teoretycznie można dwojako rozumieć to sformułowanie. Albo oznacza ono, że w gronie wszystkich liczb naturalnych istnieją pewne takie, którym można by przypisać cechę nieskończoności, albo też wszystkie liczby naturalne, rozumiane jako zbiór, „całość", tworzą zbiór nieskończony.

Pozornie, w pierwszym przypadku, określenie liczb jako nieskończonych albo skończonych napotykałoby pewną trudność. Bowiem skończoność, względnie nieskończoność, zostały związane przez św. Augustyna, jak to pokazano wcześniej, ze zbiorami, jako pewne ich cechy, a nie z liczbami naturalnymi. Tę trudność można jednak łatwo pokonać. Z każdą liczbą naturalną łatwo jest związać pewien zbiór, według następującego przepisu:

$\emptyset \to 0$,

$\{0\} \to 1$,

$\{0, 1\} \to 2$,

...,

$\{0, 1, ..., n\} \to n + 1$,

... .

Liczba będzie skończona, jeśli w ten sposób jest ona związana ze zbiorem skończonym, natomiast nieskończona, jeśli związana jest ze zbiorem nieskończonym[19].

Łatwo można uzasadnić, że każdy, budowany w ten sposób zbiór jest zbiorem skończonym. Wystarczy w tym celu wziąć pod uwagę zbiór związany z dowolną liczbą naturalną n. Jest to zbiór $\{0, 1, ...n - 1\}$. Posiada ten zbiór swój nadzbiór właściwy $\{0, 1, ..., n - 1, n\}$. Zatem jest on zgodnie

[19]Dla ułatwienia procedury, potraktowano tutaj liczby 0 i 1 jako liczby naturalne. Wcześniej wskazano, że starożytni nie uznawali 0 i 1 za liczby, a więc w konsekwencji nie traktowali ich jako liczby naturalne. Jednak dla ułatwienia posłużono się w prezentowanej procedurze liczbami 0 i 1.

z podana wyżej definicją św. Augustyna skończony. Zatem i dowolna liczba naturalna n jest liczbą skończoną.

Jeśli zatem twierdzi św. Augustyn, że „liczby są nieskończone”, to może to tylko oznaczać, iż uważa on, że zbiór liczb naturalnych jest nieskończony. Rzeczywiście w dalszym toku swoich rozważań biskup Hippony wyraźnie stwierdza, że poszczególne liczby naturalne są zawsze skończone, natomiast wszystkie razem tworzą pewien zbiór nieskończony: „choćbyś zamierzał ustalić kres dowolnie wielkiej liczby, powiększy się ona, już nie mówię przez dodanie jednostki, lecz niezależnie od swojej wielkości i niezależnie od tego, jak olbrzymia mnogość byłaby w niej zawarta, z samej istoty swej i zgodnie z wiedzą o liczbach może ulec nie tylko podwojeniu, ale nawet zwielokrotnieniu. Każda liczba zresztą ma swoje właściwości, które wyznaczają jej granice tak, iż żadna z liczb nie może być równa jakiej bądź drugiej. A zatem są one nierówne i różniące się między sobą, wzięte z osobna skończone, a wszystkie razem — nieskończone”[20].

Zatem św. Augustyn przyjmuje istnienie pewnego nieskończonego obiektu, zbioru („wszystkie razem”) wszystkich liczb naturalnych $\{0, 1, 2, ...n, ...\}$. Co więcej, dalsze rozumowanie św. Augustyna zawiera w istocie uwikłaną próbę uzasadnienia istnienia takiego zbioru. Do tego zagadnienia będzie można jednak powrócić dopiero po uczynieniu pewnej istotnej uwagi.

Warto jeszcze raz zwrócić uwagę na kryterium nieskończoności zbioru, które zostało podane przez św. Augustyna. Twierdził on mianowicie, że zbiór jest nieskończony, kiedy nie istnieje żaden jego nadzbiór właściwy.

Prowadzi to do dwóch istotnych spostrzeżeń. Zgodnie ze współczesną (refleksywną) definicją zbiorów nieskończonych, podaną w dziewiętnastym wieku przez R. Dedekinda i G. Cantora[21], zbiór jest nieskończony wtedy, kiedy jest on równoliczny, z jakimś swoim podzbiorem właściwym. Przy tym sposobie definiowania zbiorów nieskończonych, zbiory wszystkich naturalnych liczb parzystych, nieparzystych, kwadratów liczb naturalnych są nieskończone. Natomiast według definicji św. Augustyna są one skończone, ponieważ wszystkie posiadają nadzbiór właściwy, którym jest na przykład zbiór wszystkich liczb naturalnych. Zatem definicja zbiorów nieskończonych św. Augustyna nie pokrywa się z definicją współczesną zbiorów nieskończo-

[20]Św. Augustyn, dz.cyt., ks. 12, XIX.

[21]Tę paradoksalną własność zbiorów nieskończonych znał już B. Bolzano. Nie używał on jej jednak jako własności definiującej te zbiory.

nych. Eliminuje bowiem niektóre zbiory z dziedziny zbiorów nieskończonych, we współczesnym znaczeniu.

Po drugie św. Augustyn dopuścił się niekonsekwencji, a w istocie błędu, stwierdzając, że zbiór wszystkich liczb naturalnych jest nieskończony. Zgodnie bowiem z przyjętym przez niego kryterium, musiałoby to oznaczać, że zbiór ten nie posiada nadzbioru właściwego. To stwierdzenie nie jest prawdziwe. Takim nadzbiorem właściwym zbioru wszystkich liczb naturalnych jest chociażby zbiór $\{\text{Augustyn}, 0, 1, ..., n, ...\}$[22].

Tak więc w rozumowaniu św. Augustyna tkwi błąd. Określa on jako nieskończony taki zbiór, który w istocie, na mocy przyjętej przez niego definicji nieskończoności, nie jest nieskończony. Wynika też stąd, że św. Augustyn wadliwie dobrał swoją definicję nieskończoności. Wadliwie w tym znaczeniu, że starożytni właśnie jako paradygmat nieskończoności aktualnej uważali zbiór wszystkich liczb naturalnych, gdyby taki zbiór „gotowy", jako całość, istniał[23]. Oczywiście, trudno w tak paradoksalnej dziedzinie jak nieskończoność mówić o intuicji, bowiem właśnie tu ona najczęściej zawodzi. Ale starożytni mieli pewną intuicję nieskończoności aktualnej, zbioru aktualnie nieskończonego, właśnie jako zbioru wszystkich liczb naturalnych, „danych na raz". Definicja nieskończoności św. Augustyna, która w istocie kwalifikuje zbiór wszystkich liczb naturalnych jako zbiór skończony, nie spełnia tych intuicji matematyków i filozofów starożytnych.

W tym miejscu można by przerwać prowadzone badania stwierdzeniem, że w rozważania św. Augustyna dotyczące nieskończoności wkradł się istotny błąd — błąd polegający na tym, że jako nieskończony określił on taki zbiór, który zgodnie z przyjętą przez niego definicją nie był nieskończony. Ale z drugiej strony trzeba podkreślić, że zgodnie ze starożytną tradycją, która za paradygmat nieskończoności aktualnej uznawała dany „na raz", jako pewną całość, zbiór wszystkich liczb naturalnych, gdyby takowy istniał, a wbrew własnej definicji, uznał on zbiór wszystkich liczb naturalnych za

[22]Można by w tym miejscu próbować bronić św. Augustyna. Jedyna możliwa próba musiałaby iść w tym kierunku, by stwierdzić, że w jego pojęciu wielość $\{\text{Augustyn}, 0, 1, ..., n, ...\}$ nie była zbiorem, czyli nie stanowiła całości, jedności. Wówczas nie mogłaby być nadzbiorem właściwym zbioru $\{0, 1, ..., n...\}$. Dlaczego pierwsza z wymienionych wielości nie miałaby być zbiorem? Ponieważ składałaby się z heterogennych elementów: liczb naturalnych i Augustyna. Ale w istocie św. Augustyn dopuszczał takie heterogenne zbiory. Zgodnie z jego stwierdzeniem, z którego wywiedziono augustiańską definicję zbioru nieskończonego, wiedzę Bożą (pewną jedność, całość) można traktować jako zbiór wszystkich liczb naturalnych i jeszcze innych elementów, które nie były liczbami naturalnymi.

[23]Jak wspomniano wcześniej, starożytni odmawiali istnienia takiemu zbiorowi — jako gotowej całości — bowiem przyjęcie jego istnienia generowało paradoksy.

nieskończony. I w dalszej części swoich analiz starał się on uzasadnić, że taki zbiór istnieje. Ponieważ zaś starożytni, idąc za Arystotelesem, odmawiali istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych, dlatego interesujące wydaje się być uzasadnienie przez św. Augustyna istnienia zbioru wszystkich liczb naturalnych.

Biskup Hippony argumentował w sposób następujący: „więc rzeczywiście Bóg nie zna wszystkich liczb ze względu na tę nieskończoność, a kiedy wiedza Boża dojdzie do jakiejś ich kwoty, reszta ma pozostawać poza Jego świadomością? Jak wielkiej niepoczytalności trzeba, aby tak mówić! Lecz nie będą oni śmieli gardzić liczbami i wyłączyć je z zasobu wiedzy Bożej, skoro w ich własnym środowisku Platon z wielką powagą przedstawia Boga jako tworzącego świat z pomocą liczb. (...) Tak więc nieskończoność liczby, aczkolwiek żadna liczba nie może wyrazić liczb nieskończonych, nie jest niepojęta dla Tego, którego zdolność pojmowania wykracza poza wszelką liczbę”[24].

By zrozumieć myśl św. Augustyna, trzeba w tym miejscu odwołać się do związków jego filozofii z filozofią Platona. Ten ostatni traktował przedmioty matematyczne, również liczby naturalne, jako idee. A więc jako przedmioty atemporalne, niezmienne w czasie, istniejące poza przestrzenią. Św. Augustyn dostosował naukę o ideach do koncepcji chrześcijańskiej. Idee posiadające tę samą charakterystykę co u Platona umieszcza on dodatkowo w wiedzy Bożej jako myśli Boga. Zatem w konsekwencji przedmioty matematyczne, a więc i liczby naturalne (wszystkie) zawierają się w wiedzy Bożej. Istnieją tam wszystkie „na raz” jako idee–myśli. Skoro istnieją wszystkie dane „na raz”, dlatego tworzą pewną całość, zbiór aktualnie nieskończony. Odpowiadają, jako zbiór, paradygmatowi nieskończoności aktualnej, podanemu przez Arystotelesa. Ten ostatni twierdził przecież, że wzorcem nieskończoności aktualnej jest zbiór danych „na raz”, wszystkich liczb naturalnych[25].

Ostatecznie zatem akceptacja istnienia nieskończoności aktualnej u św. Augustyna posiada charakter platoński. Posługując się narzędziami wypra-

[24]Św. Augustyn, dz. cyt., ks. 12, XIX.

[25]W ten sposób św. Augustyn uzasadnił tezę, która była mu potrzebna dla obalenia przekonań swoich polemistów. Istnieje pewien obiekt nieskończony, jest nim zbiór wszystkich liczb naturalnych. Zbiór liczb naturalnych to nic innego jak zbiór idei — myśli Bożych. Zatem wiedza Boża nie tylko może objąć, ale w rzeczywistości obejmuje nieskończoność. Tym samym obalona została — zdaniem św. Augustyna — teza (1) jego przeciwników, że nieskończoności nie może objąć żadna wiedza. To zaś prowadziło do podważenia całego rozumowania jego przeciwników o cykliczności dziejów wszechświata.

cowanymi przez Platona starał się on przezwyciężyć starożytny „lęk przed nieskończonością” utrwalony i rozpropagowany przez dorobek Arystotelesa. Jak podkreślono we wstępie niniejszego artykułu, był św. Augustyn jednym z nielicznych myślicieli, który akceptował i uzasadniał istnienie nieskończoności aktualnej pomiędzy czwartym wiekiem przed Chrystusem a dziewiętnastym wiekiem po Chrystusie. Warto też zwrócić uwagę, że ci którzy w dziewiętnastym wieku starali się wprowadzić do matematyki i filozofii pojęcie nieskończoności aktualnej, wywodzili się z tej samej tradycji filozoficznej co św. Augustyn. Zarówno G. Cantor, jak i R. Dedekind oraz G. Frege byli platonikami. Generalnie można stwierdzić, że to właśnie platonizm jest w ontologii matematyki tym kierunkiem, który akceptuje istnienie zbiorów aktualnie nieskończonych. Oczywiście, platońskie uzasadnienia nie stanowią dowodu istnienia nieskończonych zbiorów dla teorii mnogości. Uzasadnienia te bowiem implikują przyjęcie bardzo mocnej ontologii. Istnienie zbiorów nieskończonych w teorii mnogości postuluje się przy pomocy aksjomatu.

Na zakończenie warto jeszcze zwrócić uwagę na to, jak niektóre wygłoszone przez św. Augustyna tezy i definicje mają się do tego, co na temat nieskończoności powiada współczesna matematyka[26].

Po pierwsze — co stwierdzono już wyżej — istnienia zbiorów nieskończonych w matematyce się nie uzasadnia, jak to czynił św. Augustyn, a jedynie postuluje przy pomocy aksjomatów. We współczesnej teorii mnogości funkcjonują liczby pozaskończone, zarówno porządkowe, jak i kardynalne. Są one typami porządkowymi, względnie mocami zbiorów nieskończonych. Natomiast św. Augustyn — jak się wydaje — negował istnienie takowych liczb, pisząc, że „żadna liczba nie może wyrazić liczb nieskończonych”[27]. Współcześnie matematyka posługuje się refleksywną definicją zbiorów nieskończonych, stwierdzającą, że nieskończonym jest ten zbiór, który posiada podzbiór właściwy, ze sobą równoliczny. Biskup Hippony uważał, że nieskończony zbiór to ten, który nie posiada nadzbioru właściwego. W konsekwencji musiał on uznać, że nieskończony zbiór wszystkich liczb naturalnych nie jest nieskończony dla wiedzy Bożej, ponieważ się w niej jako zbiór idei–myśli zawiera. To samo miało dotyczyć jakiejkolwiek innej nieskończoności[28]. Wydaje się, że przyjęta przez św. Augustyna definicja nieskończoności prowa-

[26]Trzeba by dodać, matematyka nieintuicjonistyczna. Intuicjoniści bowiem nie przyjmują istnienia zbiorów nieskończonych oraz kwestionują liczby pozaskończone, poza ewentualnie liczbą $\aleph_0$.

[27]Św. Augustyn, dz. cyt., ks. 12, XIX.

[28]Tamże.

działa do absolutyzacji nieskończoności. Nieskończoność miała być absolutna w tym znaczeniu, że jeśli coś ma być nieskończone, to może to być tylko jedno. W przypadku koncepcji biskupa Hippony, tym jedynym bytem absolutnie nieskończonym była wszystko obejmująca wiedza Boża. Ta teza o absolutnym charakterze nieskończoności została mocno wyeksponowana w scholastycznej teologii. Matematyka współczesna nie absolutyzuje nieskończoności. Dopuszcza w tym zakresie pluralizm zbiorów nieskończonych.