

Adam OLSZEWSKI

TEZA CHURCHA A PLATONIZM

Są dwa cele, które postawiłem sobie pisząc niniejszy artykuł. Pierwszy z nich dotyczy znalezienia jakiegoś argumentu przeciwko platonizmowi w filozofii matematyki, zaś drugi dotyczy znalezienia pewnych mocnych implikacji filozoficznych Tezy Churcha. Wydaje mi się, że osiągnąłem powyższe zamierzenia, pokazując jaki jest związek pomiędzy Tezą Churcha i platonizmem. Pierwsza część artykułu zawiera oryginalne sformułowanie Tezy Churcha wraz z krótkim komentarzem, zaś w drugiej precyzuję sens, w jakim rozważam tytułowy platonizm oraz tam formułuję swój główny argument.

1. Określenie Teza Churcha (w skrócie TC) pochodzi od Alonzo Churcha z pracy *An unsolvably problem of elementary number theory*¹. Pisze on tam: „Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie definicji efektywnej obliczalności, która to definicja koresponduje wystarczająco z cokolwiek niewyraźnym (*vague*), intuicyjnym pojęciem [...]” (s. 90), i dalej w przypisie trzecim: „Propozycja identyfikowania tych pojęć [funkcji rekurencyjnych λ -definiowalnych, uwaga moja A. O.] z intuicyjnym pojęciem efektywnej obliczalności została dokonana po raz pierwszy w niniejszym artykule. A także nieco dalej w przypisie: „Jednakże fakt, iż dwa tak dalece różne i (w opinii autora) równie naturalne definicje efektywnej obliczalności okazały się być równoważne, dodaje mocy racjom dla przyjęcia (*believing*) tezy, że konstytuują one ogólną charakterystykę efektywnej obliczalności w sposób spójny ze zwykłym, intuicyjnym jego rozumieniem” (s. 90 tłum. moje A. O.). Na stronie 100, pisze Church, iż propozycja identyfikacji pojęcia efektywnej obliczalności z pojęciem funkcji rekurencyjnej pochodzi od Gödla. Należy podkreślić, iż chodzi o funkcje określone w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Wspomniany Kurt Gödel w artykule *On the length of proofs*²,

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

¹ „The American Journal of Mathematics”, 58 (1936), ss. 345–363; [przedruk w:] M. Davies (ed.), *The Undecidable*, Hewlett, New York 1965, ss. 89–107, do tego wydania pracy Churcha odnosić się będą numery stron.

²[W:] M. Davies (ed.) *The Undecidable*, Hewlett, New York, 1965, ss. 82–83; tłumaczenie i przedruk z: „Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums”, 7 (1936), ss. 23–24.

pisze: „Tak więc, pojęcie ‘obliczalne’ jest w pewnym określonym sensie ‘absolutne’, podczas gdy praktycznie wszystkie inne metamatematyczne pojęcia (na przykład ‘dowiedne’, ‘definiowalne’ etc.) zależą w sposób istotny od systemu, dla którego zostały zdefiniowane”.

Praktycznie każdy podręcznik logiki, w którym podejmowane są zagadnienia rozstrzygalności, zawiera jakieś sformułowanie TC oraz krótkiej omówienie³. Świadczy to chyba o zainteresowaniu logików TC i o pewnym niepokojem z nią związanym. Otóż TC nie jest twierdzeniem matematycznym, ze względu na intuicyjne pojęcie efektywnej obliczalności występujące w jej sformułowaniu, a równocześnie przy jej założeniu dowodzi się twierdzenia o nierozstrzygalności logiki pierwszego rzędu⁴. Rodzi się wobec tego problem statusu TC. Można ją rozumieć co najmniej na następujące sposoby: jako definicję (Church), aksjomat (Kreisel⁵), stwierdzenie o charakterze empirycznym⁶. Argumenty przemawiające za przyjęciem TC rozpadają się na trzy kategorie: (a) argumenty heurystyczne, wypływające z braku kontrprzykładów (b) argumenty bazujące na bezpośredniej i wyczerpującej symulacji aktu obliczania przez człowieka, (c) argumenty oparte na fakcie stwierdzonym matematycznie, iż różne próby uściślenia pojęcia efektywnej obliczalności (maszyny Turinga, funkcje rekurencyjne, λ -rachunek Churcha, algorytmy Markowa) wyróżniają tę samą klasę funkcji⁷. Pośród rozmaitych argumentów krytycznych wobec TC są takie, które ukazują jej paradoksalne konsekwencje, jak choćby krytyka dokonana przez Kalmara⁸. Filozofowie

³W niektórych przypadkach TC jest sformułowana niezgodnie z intencją Churcha i sprowadzona do postaci ściśle matematycznej. Por. na przykład: Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin *Mathematical Logic*, Mir Publishers, Moscow 1984, s. 249.

⁴Problem „stopu” jest nierozstrzygalny, jeśli założymy prawdziwość TC. W tej sprawie por. G. Boolos, R. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 1989, ss. 112–120.

⁵G. Kreisel, *Church’s Thesis: A kind of reducibility axiom for constructive mathematics*, [w:] J. Myhill, A. Kino, R. Vesley (eds), *Intuitionism and Proof Theory*, Amsterdam 1970, ss. 121–150.

⁶Por. pracę licencjacką napisaną pod kierunkiem ks. prof. M. Hellera przez Jacka Dębca na Papieskiej Akademii Teologicznej w Krakowie w 1998 roku. Owa praca zatytułowana *Status oraz implikacje filozoficzne Tezy Churcha — zarys problemu* jest zwięzłym przedstawieniem ujęć TC, argumentów za i przeciw TC oraz prezentacją szerszego tła zagadnienia.

⁷Por. np. R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1991.

⁸L. Kalmar, *An argument against the plausibility of Church’s Thesis*, [w:] *Constructivity in Mathematics*, A. Heyting (ed.), North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1959, ss. 72–80.

rzadko zdają sobie sprawę ze znaczenia i roli TC, w przeciwieństwie do logików⁹.

2. Poprzez platonizm, wymieniony w tytule artykułu, rozumieć będziemy ten kierunek w filozofii matematyki, którego przedstawiciele twierdzą, iż obiekty matematyczne istnieją w świecie idei. W swoim bycie są niezależne od czasu, przestrzeni i poznającego podmiotu¹⁰. Wstępem do tego świata jest niesprzeczność. Trudno chyba w jakiś racjonalny sposób argumentować za prawdziwością, czy też słusznością stanowiska platońskiego w filozofii matematyki. Jest to raczej słabo uzasadnione przekonanie, przedmiot wiary. Z tego też powodu trudno jest znaleźć jakiś argument przeciwko niemu¹¹.

Poniżej zostanie przedstawiony pewien argument o charakterze filozoficznym, który powinien ustalić pewną zależność wymienioną w tytule artykułu. Przyjmijmy, że TC jest prawdziwa. Przyjmijmy również, że jest tak jak uważają platolicy, w powyżej wyróżnionym sensie. Można na tej podstawie wnosić, iż wszystkie funkcje, określone w zbiorze liczb naturalnych wraz z zerem już istnieją. Załóżmy, że dysponujemy jakąś maszyną, zbudowaną na bazie komputera, która korzystając z jakiegoś peryferyjnego urządzenia w sposób losowy rzyca monetą. Każdy kolejny rzyt (jego numer) oraz wynik każdego rzutu jest notowany na odpowiednim nośniku (zbiorem wartości byłyby 0 i 1). Gdyby ten proces (przy pewnych założeniach) udało się prowadzić w nieskończoność, określona zostałaby pewna funkcja. Funkcja ta zostałaby, w pewnym sensie, skonstruowana. Jednak jako obiekt platoński istnieje zawsze. Co więcej, dla dowolnej liczby naturalnej, będącej numerem kolejnego rzutu, można obliczyć wartość w tym punkcie. Wydaje się zatem, że jest ona obliczalna w sensie intuicyjnym. Trudno mi jednak wyobrazić sobie dowód jej obliczalności w sensie matematycznym¹². Oba założenia: TC oraz istnienie platońskich obiektów doprowadziło do negacji TC. Pokazuje to, jak mi się wydaje, że oba wymienione założenia mogą być od siebie

⁹Por. filozoficzny artykuł S. Shapiro, *Understanding Church's Thesis*, „Journal of Philosophical Logic”, 10 (1981), ss. 353–365. Tam omówiona jest rola TC dla filozofii oraz waga całego zagadnienia.

¹⁰Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 1995, s. 154.

¹¹Ciekawą rzeczą jest fakt, iż niektóre formalne ujęcia obliczalności, czynią pewne założenia odnośnie czasu, przestrzeni i możliwości poznającego podmiotu. W tej sprawie por. Boole, Jeffrey, *Computability and logic*, Cambridge University Press, 1989, ss. 19–20.

¹²Por. L. Kalmar, *An argument against the plausibility of Church's Thesis*, [w:] A. Heyting (ed.), *Constructivity in mathematics*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1959, s. 73, w sprawie jednorodności procedury obliczania.

w jakiś sposób zależne. Cały ten argument jest z pewnością problematyczny i nie całkiem jasny, dlatego z chęcią rozważę wszelkie uwagi krytyczne¹³.

3. W niniejszej części artykułu pragnę, dla łatwiejszego uchwycenia, przedstawić schemat mego nieformalnego rozumowania.

- | | | | |
|-------|---------------------------|---------------|--|
| (i) | (Teza Churcha) | | (założenie) |
| (ii) | (Platonizm) | \Rightarrow | \neg (Teza Churcha)
(na podstawie opisanej funkcji) |
| (iii) | (Teza Churcha) | \Rightarrow | $\neg\neg$ (Teza Churcha)
(podstawienie prawa logiki) |
| (iv) | $\neg\neg$ (Teza Churcha) | \Rightarrow | \neg (Platonizm)
(z (ii) na podstawie prawa logiki) |
| (v) | \neg (Platonizm) | | (z (iii), (iv), (i) i reg. odrywania) |

Jaki widać przesłanka (ii) pełni tutaj decydującą rolę. Dla jej sformułowania potrzeba było, zakładając pewną postać platonizmu, dysponować metodą obliczania pewnej „dziwnej” funkcji.

¹³Por. G. Hunter, *Metalogika*, PWN, Warszawa 1982, zadania ze strony 18. Mój argument nie odnosi się do tych sformułowań pojęcia algorytmu, które wymagają, aby w definicji algorytmu nie występowała „przypadkowość”, czy też „empiryczność”, por. na przykład: H. Rogers Jr., *Recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill Book, New York 1967, ss. 1–5 oraz E. Mendelson, *Second thoughts about Church's thesis and mathematical proofs*, „The Journal of Philosophy”, 87 (1990), ss. 225–233.