ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXII / 1998, s. 35–52*

Krzysztof WÓJTOWICZ

O HIPOTEZIE *CONTINUUM*

Artykuł ten poświęcony jest historii hipotezy *continuum*. Jego celem jest zwrócenie uwagi Czytelnika na kilka interesujcych faktów dotyczących historii badań nad tym zagadnieniem.

I

Twórcą teorii mnogości jest Cantor. Ponad sto lat temu sformułował on podstawowe pojęcia, udowodnił podstawowe twierdzenia i postawił podstawowe problemy tworzonej przez siebie teorii. Jednym z nich jest problem *continuum*, dla którego Cantor od razu zaproponował rozwiązanie — znane dziś pod nazwą *hipotezy continuum*. Problem *continuum* stanowi interesujący przykład problemu matematycznego, który można sformułować, korzystając z prostych pojęć. Odnosi się on do bardzo naturalnego obiektu matematycznego, jakimi są liczby rzeczywiste, i pozornie stanowi zagadnienie elementarne. Okazało się jednak, że rozwiązanie problemu *continuum* nie jest możliwe w ramach powszechnie akceptowanych aksjomatów, metod dowodowych i rozumowań matematycznych. Ustalenie metamatematycznego statusu hipotezy *continuum* (tj. tego, że jest ona niezależna od aksjomatów teorii mnogości) wymagało zastosowania bardzo wyrafinowanych technik i było możliwe dopiero w latach 60–tych, czyli ponad 80 lat po jej sformułowaniu. Nasuwa się tu analogia z hipotezą Fermata, której sformułowanie jest elementarne — może je zrozumieć każdy uczeń szkoły podstawowej — natomiast jej udowodnienie było możliwe dopiero po zastosowaniu wyrafinowanych technik geometrii algebraicznej ponad trzysta lat po postawieniu tej hipotezy[1].

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Hipoteza Fermata mówi, że nie istnieją takie liczby naturalne x, y, z, n, gdzie $n \geq 3$, $x^n + y^n = z^n$.

Hipoteza *continuum* stanowiła inspirację dla wielu pokoleń badaczy. Spotykany jest nawet pogląd, w myśl którego cała współczesna teoria mnogości stanowi pewnego rodzaju wariację na temat tego problemu — wyrosła bowiem z prób wyjaśnienia statusu hipotezy *continuum* i pokrewnych zagadnień (opinię taką wyraża np. Kanamori w [1996, 1]). Niezależnie od tego, czy taka opinia jest słuszna, z całą pewnością badania nad hipotezą *continuum* (i jej „okolicami") lokowały się w centralnym nurcie badań nad teorią mnogości i doprowadziły do uzyskania wielu głębokich i wyrafinowanych technicznie wyników.

II

Cantor początkowo zajmował się analizą matematyczną. W roku 1870 udowodnił twierdzenie o jednoznaczności dla trygonometrycznych szeregów funkcyjnych, czyli dla funkcji postaci: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx)]$. Okazuje się, że jeśli $f(x) = 0$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, to wówczas wszystkie współczynniki a_n i b_n są równe zeru. Założenia pierwotnej wersji twierdzenia, dotyczące zbieżności badanego szeregu do zera na całym przedziale $(-\pi, \pi)$, udało się Cantorowi osłabić. Twierdzenie o jednoznaczności przedstawienia zachodzi rówież wtedy, gdy szereg trygonometryczny jest zbieżny do zera tylko dla punktów spoza pewnego zbioru „punktów wyjątkowych" P (tzn. tylko dla $x \in (-\pi, \pi) \setminus P$). Aby podać opis zbiorów punktów wyjątkowych P, dla których zachodzi twierdzenie o jednoznaczności przedstawienia, Cantor wprowadził pojęcie pochodnej zbioru: pochodna P' zbioru P to zbiór punktów skupienia P (czyli zbiór granic wszystkich ciągów o wartościach w P); $n+1$–sza pochodna P^{n+1} jest zdefiniowana jako pochodna P^n, czyli $(P^n)'$ [2]. Zbiory wyjątkowe, dla których zachodzi twierdzenie o jednoznaczności, scharakteryzowane są warunkiem: $P^n = 0$ dla pewnego n [3].

Pojęcie ‘pochodnej zbioru rzędu n’ stało się dla Cantora punktem wyjścia do sformułowania pojęcia liczby porządkowej pozaskończonej. Ciąg pochodnych danego zbioru jest ciągiem zstępującym, tzn. dla dowolnego zbioru

[2] Dla potrzeb tego artykułu nie jest istotne, jak zdefiniowana jest pochodna zbioru: ważne jest to, że jest to operacja, która prowadzi od zbioru liczb rzeczywistych do innego zbioru liczb rzeczywistych, i że operację tę można powtarzać (iterować) dowolnie wiele razy. Szczególnie istotna jest ta ostatnia własność.

[3] Warto tu zauważyć, że w trakcie przygotowywania do druku swej pracy Cantor prowadził dyskusję dotyczącą „prawomocności" jego dowodu. Dowód ten został zaakceptowany bez zastrzeżeń przez Weierstrassa, natomiast odrzucony przez Kroneckera. Różnice zdań wynikały z innego podejścia do problemu istnienia w matematyce — Kronecker dopuszczał jedynie metody konstruktywne (por. [Purkert 1989, 50]).

P zachodzi $P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq ...$; ($P', P''$ etc. to kolejne pochodne zbioru P). Zdefiniujmy zbiór $Q = \cap[P^n : n \geq 1]$. W ogólnym przypadku Q nie musi być równe żadnemu ze zbiorów P^n, jednak zbiór Q pochodzi w pewien sposób od zbioru P. Cantor nazwał ten zbiór 'pochodną rzędu ω' zbioru P. Możemy teraz rozważyć pochodne rzędu $\omega + 1, \omega + 2$ etc. zbioru P — będą to po prostu pochodne rzędu $1, 2$, etc. zbioru Q. Idąc dalej, możemy zdefiniować pochodną rzędu $\omega + \omega$ (będzie to zbiór $\cap[P^{\omega+n} : n \geq 1]$) i tak dalej. W ten sposób znaczenia nabierają takie obiekty, jak liczba $\omega + 5, \omega + \omega + 33$ etc. Pełnią one niejako rolę indeksów przy operacji iterowania pochodnej.

W roku 1873, w korespondencji w Dedekindem, Cantor rozważał problem, czy *continuum* (np. odcinek $(0, 1)$) jest zbiorem przeliczalnym. W 1874 roku opublikował wyniki swoich rozważań: odcinek $[0, 1]$ nie jest przeliczalny. Metoda Cantora polegała, mówiąc w skrócie, na wykazaniu, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $\{r_n\}$ i dla dowolnego odcinka O, istnieje liczba r z ciągu $\{r_n\}$, która nie należy do odcinka O. W ten sposób Cantor udowodnił nieprzeliczalność odcinka $[0, 1]$ (i zarazem podał nowy dowód na istnienie liczb przestępnych)[4].

W swej kolejnej publikacji z roku 1878 Cantor wprowadził pojęcie mocy zbioru (*Mächtigkeit*): zbiory mają tę samą moc, jeśli istnieje bijekcja (czyli odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne) pomiędzy nimi. W ten sposób Cantor wprowadził nową metodę porównywania zbiorów nieskończonych. (Przypomnijmy, że już Bolzano zauważył, że relacja inkluzji nie jest dobrym sposobem na porównywanie zbiorów nieskończonych, gdyż inkluzja właściwa może zachodzić pomiędzy zbiorami równolicznymi, np. pomiędzy zbiorem liczb parzystych i naturalnych). W tym samym artykule Cantor dowiódł, że zbiory $\Re$ i $\Re^n$ (dla dowolnego n) są równoliczne. Ten wynik go zaskoczył; komentując go w liście do Dedekinda, napisał słynne „widzę to, ale nie wierzę". W tym samym artykule Cantor postawił też problem, czy są możliwe jakieś inne moce podzbiorów liczb rzeczywistych (oprócz mocy przeliczalnej i mocy *continuum*), a ściśle: ile jest klas równoważności relacji równoliczności wśród nieskończonych podzbiorów $\Re$. (W jeszcze innym sformułowaniu ten problem brzmiał: czy istnieje nieskończony podzbiór prostej rzeczywistej, który nie jest ani przeliczalny, ani równoliczny z całą prostą rzeczy-

[4]Liczby przestępne to liczby nie będące pierwiastkami żadnego wielomianu o wymiernych współczynnikach. Ponieważ wielomianów o wymiernych współczynnikach jest przeliczalnie wiele, a każdy wielomian ma skończenie wiele pierwiastków, więc tym samym liczb algebraicznych (czyli liczb będących pierwiastkami takich wielomianów) jest przeliczalnie wiele. Z faktu, że zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny, wynika, że muszą istnieć liczby przestępne.

wistą, lecz ma moc pośrednią?) Cantor postawił hipotezę, że są dwie takie klasy, czyli że każdy nieskończony zbiór liczb rzeczywistych musi być albo przeliczalny, albo równoliczny z $\Re$. Zbiorów o mocy pośredniej — w myśl postawionej przez Cantora hipotezy — nie ma. W oryginalnym sformułowaniu Cantora hipoteza *continuum* dotyczyła zatem własności podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. W tej formie moglibyśmy nazwać ją słabą hipotezą *continuum* (*weak continuum hypothesis*)[5]. Cantor był przekonany o jej prawdziwości, o tym, że hipotezę tę będzie można udowodnić. Ani on, ani nikt inny nie mógł jeszcze wtedy przypuszczać, jak trudnym problemem matematycznym okaże się hipoteza *continuum* i jak wielkie będzie jej znaczenie dla rozwoju teorii mnogości, a przez to (pośrednio) dla całej matematyki. Warto podkreślić fakt, że problem, który stanowił tak istotny impuls dla stworzenia abstrakcyjnej teorii mnogości, umożliwiającej zinterpretowanie (zrekonstruowanie) w niej praktycznie wszystkich teorii matematycznych (a więc stanowiącej podstawę dla matematyki), dotyczył tak konkretnego obiektu matematycznego, jak liczby rzeczywiste. Nie wyrósł zatem z rozważań dotyczących logicznej struktury teorii matematycznych, ale z prób rozwiązania „elementarnego" zagadnienia matematycznego.

Następną ważną publikacją Cantora jest *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Praca ta ukazała się w sześciu częściach w latach 1878–1884 (część piąta została potem wydana oddzielnie jako *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*). Cantor sformułował w niej podstawowe pojęcia tworzonej przez siebie teorii zbiorów nieskończonych. Wprowadził tam pojęcia liczby porządkowej i dobrego porządku. Inspiracją dla zdefiniowania pojęcia liczby porządkowej były jego wcześniejsze rozważania dotyczące pochodnych zbiorów dowolnego rzędu[6]. Cantor podał niezależną od pojęcia pochodnej zbioru definicję liczby porządkowej — można powiedzieć, że indeksy „usamodzielniły się" i rozpoczęły samoistne istnienie. Cantor w tej pracy rozważał także szerszą niż dotychczas klasę obiektów — interesowały go już nie tylko konkretne podzbiory $\Re^n$, ale wszelkie zbiory nie należące do żadnej konkretnej „sfery pojęciowej" (*Begriffssphäre*), traktowane abstrakcyjnie, w oderwaniu od natury ich elementów. W tym właśnie

[5]Terminem tym posługuje się np. Moore w swoich pracach historycznych (por. np. [1990]) dla odróżnienia słabej hipotezy *continuum* od hipotezy *continuum* we współczesnym sformułowaniu. Te dwie wersje są równoważne przy założeniu pewnika wyboru.

[6]Nad pojęciem liczby porządkowej — traktowanej niejako abstrakcyjnie, nie tylko jako indeks przy operacji pochodnej zbioru — Cantor zastanawiał się już w latach 1871–72; mimo tego nie opublikował wyników swych rozważań we wcześniejszych pracach. Wiemy o tym jednak z jego późniejszych pism i listów (por. [Kanamori 1996, 3]).

artykule Cantor zaczął używać terminu *Menge* (zbiór) w miejsce dotychczas używanego terminu *Punktmannigfaltigkeit*, odnoszącego się do konkretnych podzbiorów $\Re^n$.

Podstawowym pojęciem rozważanym przez Cantora w jego pracy było pojęcie dobrego porządku (*Wohlordnung*). Cantor zaproponował zasadę dobrego porządku, głoszącą, że zawsze możliwe jest dobre uporządkowanie każdego dobrze zdefinowanego (czy inaczej — dobrze określonego) zbioru[7]. Zasada ta umożliwiła Cantorowi podanie „abstrakcyjnej" definicji liczby porządkowej. Wprowadził on liczby porządkowe za pomocą dwóch zasad generowania tych liczb (Erzeugungsprinzipien):

1. przejście od liczby α do liczby $\alpha + 1$, czyli następnika liczby α;

2. przejście od dobrze uporządkowanej kolekcji (zbioru) liczb porządkowych, które nie mają elementu największego, do odpowiedniej liczby granicznej. Właśnie tutaj — dla zapewnienia sensowności tej definicji — potrzebna jest zasada dobrego porządku[8].

W swej pracy Cantor udowodnił podstawowe fakty dotyczące związków pomiędzy tak zdefiniowanymi liczbami porządkowymi a mocami zbiorów. Dzisiaj związki te są dla nas oczywiste — liczby kardynalne definiujemy po prostu jako najmniejsze liczby porządkowe danej mocy. Jednak w czasach Cantora zależności te nie były jeszcze znane. Cantor zaproponował pewną szczególną zasadę (*Hemmungsprinzip*) ograniczającą możliwość tworzenia nowych liczb porządkowych. W myśl tej zasady nową liczbę porządkową można utworzyć jedynie wtedy, kiedy zbiór liczb ją poprzedzających ma dobrze określoną moc. Na przykład liczbę ω — najmniejszą liczbę porządkową nieskończoną — można utworzyć, gdyż zbiór poprzedzających ją liczb naturalnych jest zbiorem przeliczalnym. Najmniejsza liczba porządkowa nieprzeliczalna jest dobrze określona dzięki temu, że zbiór jej poprzedników (czyli liczb porządkowych przeliczalnych) ma dobrze określoną moc (oznaczaną przez χ_1), etc. Cantor udowodnił, że χ_1 (czyli moc zbioru przeliczalnych liczb porządkowych) jest następną po χ_0 liczbą kardynalną nieskończoną

[7] Zbiór jest dobrze uporządkowany, jeśli każdy jego podzbiór zawiera element najmniejszy. Przykładem zbioru dobrze uporządkowanego jest zbiór liczb naturalnych. Nie jest dobrze uporządkowany np. odcinek $[0, 1]$, gdyż np. jego podzbior $(0, 1)$ nie ma elementu najmniejszego. W myśl zasady dobrego porządku możliwe jest takie zdefiniowanie porządku na każdym zbiorze, aby był on zbiorem dobrze uporządkowanym.

[8] Takim przejściem jest na przykład przejście od zbioru liczb naturalnych $\{1, 2, 3, ...\}$ do liczby porządkowej ω, będącej liczbą graniczną. Dalej przechodzimy od zbioru $\{1, 2, 3...\omega, \omega + 1, \omega + 2, ...\}$ do liczby granicznej $\omega + \omega$ etc.

(nie należy tego faktu mylić z hipotezą *continuum*!). W tym celu konieczne było użycie zasady dobrego porządku, którą Cantor uważał za prawdziwą[9].

Zdefiniowane pojęcia umożliwiły Cantorowi sformułowanie hipotezy *continuum* w innej postaci: $\Re$ jest równoliczne ze zbiorem przeliczalnych liczb porządkowych (czyli: $\mathbf{c} = \chi_1$), która jest (przy założeniu zasady dobrego porządku) równoważna „słabej hipotezie *continuum*".

Warto tu wspomnieć o tym, że w *Grundlagen* Cantor sformułował pewne uogólnienie hipotezy *continuum*. Twierdził bowiem, że zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych należy do „trzeciej klasy liczbowej", co — w dzisiejszej terminologii — oznacza, że $\mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \chi_2$. Stwierdzenie to jest silniejsze od hipotezy *continuum*. Jest to jedyne uogólnienie hipotezy *continuum*, jakie rozważał Cantor. Nie mógł on oczywiście w tym czasie sformułować tzw. uogólnionej hipotezy *continuum* (GCH = *generalized continuum hypothesis*), gdyż nie było wówczas jeszcze znane potęgowanie liczb kardynalnych (odkryte dopiero w latach 90–tych)[10].

W *Grundlagen* Cantor wprowadził pojęcie 'zbioru doskonałego' liczb rzeczywistych (jest to niepusty, domknięty i nie posiadający punktów izolowanych zbiór liczb rzeczywistych) i udowodnił, że każdy zbiór doskonały ma moc *continuum*. Fakt ten, wraz z obserwacją, że każdy nieprzeliczalny zbiór domknięty jest sumą zbioru doskonałego i zbioru przeliczalnego (twierdzenie Cantora–Bendixsona), umożliwił Cantorowi udowodnienie, że każdy nieprzeliczalny zbiór domknięty ma moc *continuum*. Można zatem powiedzieć, że Cantor udowodnił hipotezę *continuum* dla ograniczonej klasy podzbiorów $\Re$, a mianowicie dla zbiorów domkniętych. Nie rozwiązał w ten sposób problemu *continuum*, ale wynik ten zainicjował pewien program badawczy (o którym jeszcze będzie mowa).

W roku 1900, na słynnym Kongresie Matematyków w Heidelbergu, Hilbert sformułował listę 23 najważniejszych problemów otwartych w matematyce. Hipoteza *continuum* znalazła się tam na pierwszym miejscu. W 1904

---

[9] Czytelnika może zdziwić, że Cantor udowodnił fakt, że χ_1 — czyli następna po χ_0 liczba kardynalna — jest rzeczywiście następną liczbą kardynalną. Wygląda to na tautologię. Jednak zauważmy, że liczby kardynalne początkowo definiowane były w terminach klas abstrakcji relacji równoliczności. Tymczasem liczby χ_0, χ_1, χ_2 etc. definiowane były w terminach mocy zbiorów odpowiednich liczb porządkowych. Tym samym stwierdzenie, że rzeczywiście nie ma żadnej liczby kardynalnej pomiędzy χ_0 i χ_1, nie jest tautologią, ale wynikiem dotyczącym struktury liczb porządkowych i kardynalnych oraz relacji pomiędzy nimi.

[10] Uogólniona hipoteza *continuum* mówi, że dla każdej liczby kardynalnej $\mathbf{k}$ zachodzi $\mathbf{k}^+ = 2^{\mathbf{k}}$, gdzie $\mathbf{k}^+$ jest następną po $\mathbf{k}$ liczbą kardynalną. Hipoteza ta została sformułowana przez Hausdorffa w 1908 roku.

roku, na następnym Kongresie Matematyków w Heidelbergu, König ogłosił, że *continuum* nie da się dobrze uporządkować, czyli że nie może być liczbą porządkową (i tym samym także liczbą kardynalną). Wynikałoby stąd, że postawiona przez Cantora hipoteza *continuum* jest fałszywa, gdyż *continuum* w ogóle nie może być porównywane z innymi liczbami kardynalnymi. Okazało się jednak, że w dowodzie zaproponowanym przez Königa był błąd (odkrył go Zermelo już następnego dnia po ogłoszeniu przez Königa jego wyniku). Niedługo później Zermelo (który pod wpływem Hilberta zajmował się już od pewnego czasu teorią mnogości) sformułował pewnik wyboru, pozwalający na udowodnienie zasady dobrego porządku, którą posługiwał się Cantor.

III

Cantor uprawiał tworzoną przez siebie teorię mnogości w sposób — wedle dzisiejszych standardów — nieformalny. Sytuacja taka nie była oczywiście niczym nietypowym na owe czasy — matematycy uprawiali początkowo np. rachunek różniczkowy i całkowy w sposób nieścisły, posługując się np. niesprecyzowanym i rozumianym jedynie intuicyjnie pojęciem nieskończoności. Podobnie było w wypadku teorii mnogości Cantora — niektóre fragmenty jego fundamentalnego *Grundlagen* miały charakter filozoficzny; sam Cantor pisał zresztą o tym w liście do wydawcy „Mathematische Annalen", Felixa Kleina. Treści matematyczne, filozoficzne (oraz metafizyczne, a nawet teologiczne) były dla Cantora ściśle ze sobą związane[11].

Ten sposób uprawiania matematyki odchodził jednak stopniowo w przeszłość. Metoda aksjomatyczna stopniowo nabierała coraz większego znaczenia, pojawiały się nowe standardy ścisłości, czego dowodem jest np. dzieło Hilberta *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899, gdzie autor posługuje się ścisłą metodą akjsomatyczną. Niebawem metody aksjomatyczne wkroczyły także na teren teorii mnogości. W roku 1908 Zermelo zaproponował pierwszą aksjomatyzację dla teorii mnogości. Motywacją dla jej stworzenia była przede wszystkim dyskusja dotycząca pewnika wyboru — Zermelo poprzez podanie aksjomatyzacji chciał *explicite* sformułować założenia, które umożliwiłyby lepsze zrozumienie pojęcia zbioru i uzasadnienie pewnika wyboru.

Ostateczną wersją aksjomatyki dla teorii mnogości była aksjomatyka Zermelo–Fraenkla (oznaczana standardowo przez ZF). W oryginalnej po-

[11] Czytelnika zainteresowanego filozoficznymi i religijnymi poglądami Cantora odsyłamy np. do [Murawski 1984] czy [Purkert 1989]. W pracach tych znaleźć można analizę związków pomiędzy filozoficznymi poglądami Cantora a jego matematyczną twórczością.

staci została ona sformułowana w języku drugiego rzędu. Początkowo toczyła się dyskusja dotycząca tego, czy teoria mnogości powinna być sformułowana w ramach logiki pierwszego czy drugiego rzędu. Chodziło o problem, jak najlepiej sformalizować pojęcie „określonej własności” (*definite Eigenschaft*), którą posługiwał się Zermelo przy formułowaniu aksjomatu wyróżniania[12]. Zwolennikiem logiki drugiego rzędu był Zermelo, zwolennikiem logiki pierwszego rzędu — Skolem. „Historycznym zwycięzcą” okazała się logika pierwszego rzędu i obecnie olbrzymia większość badań dotyczących teorii mnogości dotyczy teorii Zermelo–Fraenkla pierwszego rzędu. Dotyczy to także badań nad metamatematycznym statusem hipotezy *continuum*.

IV

Cantor udowodnił hipotezę *continuum* dla zbiorów domkniętych. Zachodzi ona także dla zbiorów otwartych[13]. Dla najprostszych podzbiorów prostej rzeczywistej prawdziwa jest zatem hipoteza *continuum*. Pojawiło się naturalne pytanie, na jak bogatą klasę podzbiorów $\Re$ można uogólnić ten wynik.

W roku 1898 Borel zdefiniował klasę zbiorów dziś nazywanych borelowskimi. Zbiory te powstają ze zbiorów otwartych poprzez zastosowanie do nich operacji przeliczalnych sum, przecięć i dopełnień, iterowanych odpowiednio długo.

W roku 1914 Hausdorff udowodnił hipotezę *continuum* dla pewnej podklasy zbiorów borelowskich, dla tzw. zbiorów $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$ oraz $F_{\sigma\delta\sigma}$[14]. W roku 1916 Alexandroff udowodnił, że hipoteza *continuum* zachodzi dla wszystkich zbiorów borelowskich, czyli znacznie szerszej klasy zbiorów niż same tylko zbiory otwarte i domknięte. W tym samym roku Suslin zauważył, że rzuty zbiorów borelowskich nie zawsze muszą być zbiorami borelowskimi[15]. Operacja rzutowania wyprowadza poza klasę zbiorów borelowskich, prowadząc do klasy zbiorów analitycznych. Okazało się [Suslin 1917], że dla klasy

[12] Aksjomat ten miał postać: dla każdego zbioru x i każdej własności φ (tu Zermelo mówił o *definite Eigenschaft*), istnieje zbiór y składający się dokładnie z tych elementów z zbioru x, które spełniają własność φ, tzn. $y = \{z \in x \colon \varphi(x)\}$.

[13] Każdy zbiór otwarty musi bowiem zawierać przedział otwarty (a, b), który ma moc *continuum*.

[14] Zbiory G_δ to przeliczalne przecięcia zbiorów otwartych, $G_{\delta\sigma}$ to przeliczalne sumy zbiorów typu G_δ etc. Podobnie F_σ to przeliczalne sumy zbiorów domkniętych, $F_{\sigma\delta}$ to przeliczalne iloczyny takich zbiorów etc.

[15] Rzutem zbioru $A \subseteq \Re^2$ na $\Re$ nazywamy zbiór $B = \{x \in \Re\colon \exists_y (x, y) \in A\}$, czyli „cień”, jaki zbiór A rzuca na prostą.

zbiorów analitycznych również zachodzi hipoteza *continuum* — każdy nieskończony zbiór analityczny jest przeliczalny, bądź równoliczny z $\Re$. Jednocześnie z badaniami dotyczącymi rozwiązania problemu *continuum* dla możliwie szerokiej klasy podzbiorów $\Re$ (które można traktować jako pracę nad uogólnieniem pionierskich wyników Cantora) coraz częściej próbowano ustalić metamatematyczny status hipotezy *continuum*. Było to możliwe dzięki rozwojowi metody aksjomatycznej, która pozwalała na lepsze zrozumienie logicznej struktury teorii matematycznych. W 1923 roku Hilbert wyraził opinię, że stworzone przez niego metody teoriodowodowe umożliwią rozwiązanie wielu otwartych problemów w teorii mnogości, w szczególności umożliwią rozwiązanie hipotezy *continuum*. Z drugiej strony, w tym samym czasie Skolem sformułował tezę, że podana przez Zermelo w 1908 roku aksjomatyka dla teorii mnogości nie pozwoli na rozwiązanie problemu *continuum*. Jak się okazało, rację miał Skolem, ale trzeba było czekać jeszcze 40 lat na potwierdzenie jego hipotezy.

W roku 1930 Zermelo zaproponował opis struktury uniwersum teoriomnogościowego w postaci tzw. hierarchii kumulatywnej. Zermelo wyszedł od idei, że „startując" od zbioru pustego, poprzez iterację operacji zbioru potęgowego w pozaskończoność otrzymamy pełne uniwersum zbiorów, tzn., że każdy zbiór znajdzie się w tej hierarchii. (Oparł się on zatem na tzw. iteracyjnej koncepcji zbioru.) W dzisiejszej notacji moglibyśmy fakt ten zapisać w sposób następujący:

$$V_0 = \emptyset;\ V_{\alpha+1} = P(V_\alpha);\ V_\lambda = \cup[V \subseteq \xi\colon \xi < \lambda],\ \text{dla } \lambda \text{ granicznych},$$

gdzie $P(A)$ oznacza zbiór potęgowy zbioru A.

Uniwersum V definiujemy jako sumę V_ξ:

$$V = \cup[V_\xi\colon \xi \in On],$$

gdzie On oznacza klasę liczb porządkowych.

Uniwersum to budowane jest indukcyjnie. W każdym kroku następnikowym wykonujemy operację zbioru potęgowego, w kroku granicznym sumujemy otrzymane do tej pory zbiory. W każdym kroku następnikowym bierzemy wszystkie możliwe zbiory, tj. cały zbiór potęgowy zbiorów dotychczas skonstruowanych. Nie nakładamy żadnych ograniczeń na „tempo wzrostu" uniwersum.

W latach 30–tych Gödel zauważył, że hierarchię tę można „odchudzić", biorąc w krokach następnikowych nie pełen zbiór potęgowy, ale jedynie zbiory definiowalne w pewien szczególny sposób[16]. W ten sposób w każdym kroku powstaje znacznie mniej nowych zbiorów, ale otrzymane w ten sposób uniwersum zbiorów konstruowalnych nadal spełnia aksjomaty teorii mnogości ZF, czyli jest modelem dla teorii mnogości ZF. Co więcej, okazuje się, że w modelu tym prawdziwy jest pewnik wyboru (AC = *axiom of choice*) i uogólniona hipoteza *continuum* (GCH). Wynik Gödla pokazuje zatem, że jeśli teoria mnogości ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest również teoria mnogości ZF+AC+GCH. Jest to pierwszy wynik dotyczący relatywnej niesprzeczności. Wynik ten Gödel znał już w roku 1937, jednak zwlekał trzy lata z jego opublikowaniem — zawierająca go praca ukazała się dopiero w roku 1940. Wynikło to prawdopodobnie stąd, że Gödel pracował nad udowodnieniem niezależności hipotezy *continuum* (por. [Moore 1990]), nie udało mu się jednak osiągnąć zamierzonego celu. Gödel wprawdzie osiągnął pewne częściowe wyniki dotyczące niezależności aksjomatu konstruowalności i pewnika wyboru, jednak ich nie opublikował. W tym czasie coraz bardziej intensywnie zajmował się filozofią; natomiast tracił zainteresowanie kwestiami czysto technicznymi[17].

---

[16]Dla Czytelnika zainteresowanego szczegółami technicznymi przypomnimy tu definicję uniwersum L. Niech M bedzie modelem dla języka J. Zbiór y nazwiemy definiowalnym z parametrami nad M, jeśli istnieje formuła $\varphi(\nu_0, ..., \nu_n)$ języka J oraz parametry $a_1, ..., a_n \in M$ takie, że:

$$z \in y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } M \text{ spełnia } \varphi(z, a_1, ..., a_n)$$

Dla dowolnego zbioru x, $\mathrm{def}(x) := \{x \subseteq y \colon x \text{ jest definiowalny z parametrami nad strukturą } (x, \in)\}$. Hierarchię zbiorów konstruowalnych definiujemy w sposób następujący:

$$L_0 = \emptyset;\ L_{\alpha+1} = \mathrm{def}(L_\alpha);\ L_\lambda = \cup[L_\xi : \xi < \lambda] \text{ dla } \lambda \text{ granicznych.}$$

Uniwersum zbiorów konstruowalnych L definiujemy jako:

$$L = \cup[L_\xi : \xi \in On].$$

[17]Moore w [1988] cytuje opinię Wanga, który twierdzi, że gdyby Gödel nie porzucił badań nad dowodami niezależności, to prawdopodobnie już w roku 1950 udowodniłby niezależność hipotezy *continuum*. Moore cytuje także wypowiedź samego Gödla, który stwierdził, że nie opublikował swoich cząstkowych wyników dotyczących niezależności pewnika wyboru, gdyż obawiał się, że skieruje to teorię mnogości w niewłaściwym kierunku. Wypowiedź ta jest zrozumiała w świetle realistycznych poglądów Gödla, dla którego ważniejszy od problemu relatywnej niesprzeczności był problem poszukiwania adekwatnego opisu uniwersum zbiorów, czyli poszukiwania nowych aksjomatów. Czytelnika zainteresowanego filozoficznymi poglądami Gödla odsyłamy np. do [Wang 1987], [Wójtowicz 1996].

Sam Gödel w latach 30–tych skłonny był uznać prawdziwość hipotezy *continuum*, gdyż skłonny był uznać za prawdziwy aksjomat konstruowalności, z którego ona wynika. Chodziło tu oczywiście o prawdziwość rozumianą nie jako dowodliwość w pewnym systemie aksjomatycznym. Gödel miał na myśli prawdziwość zdań dotyczących istniejącej obiektywnie (niezależnie od naszych badań, poznawczych wysiłków i tworzonych przez nas teorii) rzeczywistości zbiorów. Gödel był, jak wiadomo, zdeklarowanym realistą; pytania teoriomnogościowe (w szczególności problem *continuum*) stanowiły dla niego autentyczne pytania naukowe dotyczące obiektów matematycznych, a nie jedynie metamatematycznych własności systemów formalnych. Początkowo Gödel przypuszczał, że aksjomat konstruowalności poprawnie opisuje uniwersum zbiorów. Później jednak zmienił zdanie. W swym słynnym artykule [1947/64] wskazał na dwa rodzaje przyczyn, które skłoniły go do odrzucenia hipotezy *continuum*:

(i) Jedyny znany dowód hipotezy *continuum* odwołuje się do aksjomatu konstruowalności ($V = L$), który ogranicza uniwersum zbiorów do zbiorów definiowalnych w odpowiedni sposób. Narzucanie tego typu ograniczeń na uniwersum zbiorów nie jest, według Gödla, uzasadnione. Aksjomat konstruowalności jest „miminalistyczny" — zbiór potęgowy jest najmniejszy z możliwych[18]. Może się okazać, twierdzi dalej Gödel, że z jakiegoś „maksymalistycznego" aksjomatu, będącego (w odpowiednim sensie) przeciwieństwem aksjomatu konstruowalności, będziemy mogli wyprowadzić negację hipotezy *continuum* [Gödel 1947/64, 266]. O aksjomatach tego typu, „opozycyjnych" w stosunku do konstruktywistycznych interpretacji matematyki, pisał w liście do Ulama. W liście tym Gödel wyraził opinię, że umożliwią one rozwiązanie podstawowych problemów teorii mnogości, w szczególności hipotezy *continuum* (por. [Moore 1990, 168]).

(ii) Gödel wskazał na szereg paradoksalnych, jego zdaniem, konsekwencji hipotezy *continuum*. Można bowiem udowodnić w teorii mnogości istnienie „małych", nieprzeliczalnych podzbiorów $\Re$. Z hipotezy *continuum* wynika zatem, że mogą istnieć „małe" zbiory mocy *continuum*.

[18]Czytelnika może zdziwić, że mówimy o różnych zbiorach potęgowych. Jednak pojęcie zbioru potęgowego nie jest pojęciem absolutnym: w różnych modelach dla teorii mnogości rolę zbioru potęgowego danego zbioru x mogą odgrywać różne zbiory (por np. [Burgess 1977]).

> Gödel podał kilka przykładów tego typu zbiorów, twierdząc, że ich istnienie jest sprzeczne z intuicjami [Gödel 1947/64, 267–268][19].

Nie są to oczywiście argumenty formalne, ale raczej ‘filozoficzne’. Warto tu przypomnieć, że za jedną w przyczyn niemożności rozwiązania problemu *continuum* Gödel uznawał niedostateczną analizę filozoficzną podstawowych pojęć teorii mnogości, która powinna być prowadzona na poziomie bardziej fundamentalnym [1947/64, 261]. Wang twierdzi, że Gödel, który uważał matematykę (zwłaszcza teorię mnogości) za analizę pojęć, prawdopodobnie obecnie nie interesowałby się teorią mnogości ze względu na jej wysoce techniczny, oderwany od podstawowych problemów filozoficznych, charakter (por. [Wang 1987, 208]).

Gödel przypuszczał, że hipoteza *continuum* jest nierozstrzygalna na mocy aksjomatów teorii mnogości i że dla jej rozwiązania (tj. ustalenia ‘prawdziwej wartości *continuum*’) konieczne jest odwołanie się do argumentów wykraczających poza ZF. Przykładem takich nowych aksjomatów, precyzujących pojęcie zbioru mogłyby, według Gödla, być jakieś aksjomaty istnienia odpowiednio dużych liczb kardynalnych, które Gödel nazywał ‘silnymi aksjomatami nieskończoności’[20].

Hipoteza Gödla, że hipoteza *continuum* jest nierozstrzygalna na mocy aksjomatów ZF, znalazła swoje potwierdzenie w roku 1963, kiedy to Cohen udowodnił jej niezależność od ZF metodą forcingu. Jest to metoda konstruowania modeli dla teorii mnogości. Wychodząc od danego modelu przeliczalnego M[21], poprzez umiejętne „dodanie” do niego pewnego szczególnego zbioru G otrzymujemy model $M[G]$ o żądanych własnościach. Możemy na przykład tak dobrać dodawany do modelu zbiór G, aby w otrzymanym modelu $M[G]$ prawdziwa była hipoteza *continuum*. W innym modelu $M[G']$

[19]Przykłady Gödel zaczerpnął z monografii Sierpińskiego, który od lat 20–tych badał implikacje hipotezy *continuum*.

[20]Duże liczby kardynalne to, mówiąc nieformalnie, zbiory tak duże, że ich istnienia nie da się udowodnić w teorii mnogości ZFC. Mówiąc obrazowo, w hierarchii teoriomnogościowej znajdują się one ‘powyżej’ tych zbiorów, które możemy w ZFC opisać i których istnienie wynika z aksjomatów ZFC. Nazwa „silne aksjomaty nieskończoności” nawiązuje do faktu, że „z punktu widzenia” zbiorów skończonych, nie możemy udowodnić istnienia zbioru nieskończonego. Jego istnienie musimy zagwarantować odpowiednim aksjomatem, postulującym istnienie zbioru nieskończonego. Podobnie jest w przypadku dużych liczb kardynalnych, których istnienie musimy postulować nowym aksjomatem — „z punktu widzenia” zbiorów mniejszych nie możemy udowodnić ich istnienia.

[21]Na mocy twierdzenia Skolema–Löwenheima każda teoria pierwszego rzędu (sformułowana w języku przeliczalnym) jeśli ma model nieskończony, to ma również model przeliczalny. W szczególności dotyczy to teorii mnogości.

(powstającym przez dodanie innego zbioru G) prawdziwa może być jej negacja; w jednym modelu prawdziwy pewnik wyboru, w innym fałszywy, etc. Metoda forcingu okazała się na tyle silna i ogólna, że pozwoliła na udowodnienie niezależności od aksjomatów ZF nie tylko pewnika wyboru i hipotezy *continuum*, ale szeregu innych zdań o teoriomnogościowym charakterze.

Okazało się zatem, że hipoteza *continuum* jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości ZF — w niektórych modelach jest prawdziwa, w innych zaś jest fałszywa. Pozostała nadzieja, że być może jakieś naturalne zdania wzmacniające ZF pozwolą na jej rozstrzygnięcie. Jednak niebawem uzyskano szereg wyników, które pokazały, że nadzieje takie są płonne.

W roku 1964 Easton udowodnił, że *continuum* może przyjmować niemalże dowolne wartości — jedynym ograniczeniem był pewien techniczy warunek dotyczący tzw. współkońcowości. W szczególności okazało się, że *continuum* może być równe np. $\omega_5, \omega_{555}, \omega_{\omega+28}$, etc., nie ma zatem niemal żadnych ograniczeń dotyczących wartości *continuum* (z wyjątkiem tego, że jego współkońcowość nie może być przeliczalna)[22]. Z kolei wyniki Levy'ego i Solovaya pokazują, że zarówno hipoteza *continuum*, jak i jej negacja są niesprzeczne z aksjomatami istnienia tzw. dużych liczb kardynalnych. „Silne aksjomaty nieskończoności", o których mówił w [1947/64] Gödel, nie mogą nam zatem dopomóc w rozwiązaniu hipotezy *continuum*.

Sam Gödel powrócił jeszcze do rozważań dotyczących hipotezy *continuum*. Na przełomie lat 60–tych i 70–tych zaproponował on kilka aksjomatów (tzw. *square axioms*) dotyczących szczególnych rodzin funkcji z N w N, które miałyby umożliwić rozwiązanie problemu *continuum*. Rozumowania Gödla zawierały jednak błędy; okazało się, że zaproponowane przez niego aksjomaty nic nie wnoszą do dyskusji.

V

Zakończmy kilkoma uwagami ogólnej natury.

1. Hipoteza *continuum* jest zdaniem o bardzo prostym sformułowaniu, dotyczącym obiektów matematycznych, z jakimi stykamy się na co dzień. Jednak badania nad nią (i zagadnieniami pokrewnymi) stanowiły ważny impuls dla stworzenia bardzo abstrakcyjnej i ogólnej teorii matematycznej, jaką jest teoria mnogości.

[22] Sformułowanie „*continuum* może być równe ω_5 czy ω_{555}" oznacza, że istnieją modele dla teorii ZF+„$\mathbf{c} = \omega_5$" i dla teorii ZF+„$\mathbf{c} = \omega_{555}$". Oczywiście, w każdym konkretnym modelu dla teorii mnogości ZF *continuum* ma ustaloną wartość. Chodzi jednak o to, że w różnych modelach wartości te mogą być różne.

2. Należy jednak zauważyć, że hipoteza *continuum* — sama w sobie interesująca — nie ma zbyt dużego znaczenia dla „prawdziwych" matematyków (topologów, analityków, stochastyków, etc.). Twierdzenia np. z geometrii różniczkowej czy analizy zespolonej nie wymagają założenia CH (= *continuum hypothesis*), pomimo iż dotyczy ona podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych $\Re$. Dlatego metamatematyczny status CH, intereresujący dla specjalisty z zakresu teorii mnogości, ma stosunkowo niewielkie znaczenie dla innych dyscyplin matematycznych[23].

3. Wiemy obecnie, że hipoteza *continuum* jest nierozstrzygalna w ramach ZFC (i nawet w ramach wzmocnień ZFC). Możemy jednak zastanawiać się nad jej wiarygodnością — tj. nad tym, na ile nasze rozumienie pojęcia zbioru prowadzi nas do jej zaakceptowania, bądź odrzucenia. Trudno oczywiście oczekiwać, że wśród matematyków zapanuje zgoda co do „prawdziwej wartości *continuum*". Dla wielu matematyków (zwłaszcza zwolenników formalizmu) problem wiarygodności CH jest pozbawiony sensu — sensowne pytania dotyczą dla nich jedynie metamatematycznych własności systemów formalnych. Można spotkać się z poglądem, że hipoteza *continuum* została rozstrzygnięta — znamy bowiem jej status metamatematyczny, co jest wynikiem w pełni zadowalającym (opinię taką wyraża np. twórca forcingu — Cohen).

Można jednak formułować argumenty dotyczące wiarygodności (czy prawdziwości) CH. Tego typu rozważania są prowadzone, choć nie w sposób systematyczny — raczej jako pewnego rodzaju „skutek uboczny" badań technicznych. Trzeba przyznać, że odnoszą się do nie zawsze jasnych i do końca sprecyzowanych intuicji czy wręcz do estetycznych preferencji matematyków. Nie znaczy to jednak, że analizy takie muszą być uznane za bezsensowne. Osiąganie nowych wyników technicznych i nieformalna (choć bazująca na wynikach technicznych) analiza pojęciowa może prowadzić do krystalizowania się lepszego rozumienia natury uniwersum zbiorów — nawet jeśli nie doprowadzą do zgody co do „prawdziwej wartości *continuum*". Warto zatem pamiętać o heurystycznych (pozaformalnych) argumentach do-

[23] W pracy [Felgner 1979] Czytelnik znajdzie przykłady twierdzeń, które udowodniono początkowo w oparciu o założenie CH, jednak z dowodu tych twierdzeń hipotezę *continuum* można było potem wyeliminować. Nie są w tej chwili znane istotne twierdzenia matematyczne, dla udowodnienia których konieczne byłoby założenie hipotezy *continuum* (bądź jej negacji).

tyczących hipotezy *continuum*, jak również innych aksjomatów teoriomnogościowych[24].

BIBLIOGRAFIA

Burgess J. [1977] *Forcing*, [w:] Barwise J. (ed.), *Handbook of Mathematical logic*, Springer–Verlag.

Felgner U. [1979] *Bericht über die Cantorsche Kontinuums–Hypothese*, [w:] Felgner U. (ed.), *Mengenlehre*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Freiling C. [1986] *Axioms of Symmetry: Throwing Darts at the Real Number Line*, „Journal of Symbolic Logic" 51, 190–200.

Gödel K. [1947/64] *What is Cantor's Continuum Problem?*, [w:] Benacerraf P., Putnam H. (eds), *Philosophy of Mathematics*, Prentice–Hall, 1964, 258–273.

Kanamori A. [1996] *The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen*, „Bulletin of Symbolic Logic" 2, 1–71.

Maddy P. [1988] *Believing the Axioms. I*, „Journal of Symbolic Logic" 53, 481–511.

Moore G. H. [1988] *The Origins of Forcing*, [w:] Drake F., Truss J. K. (eds), *Logic Colloqium '86*, Amsterdam, North–Holland.

——— [1990] *Introductory Note to 1947 and 1964*, [w:] Gödel K., *Collected Works*, vol. 2, Feferman S. [i in.] (eds), Oxford University Press.

Murawski R. [1984] *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne" 11–12 (228–229), 75–88.

Purkert W. [1989] *Cantor's Views on the Foundations of Mathematics*, [w:] Rowe D. E., McCleary J. (eds): *The History of Modern Mathematics*, vol. 1, Academic Press, 49–65.

[24]Por np. [Maddy 1988], [Wójtowicz 199?]. Ciekawy przykład „filozoficznego" dowodu negacji hipotezy *continuum* Czytelnik znajdzie w [Freiling 1986].

Wang H. [1987] *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge.

Wójtowicz K. [1996] *Filozofia Kurta Gödla*, „Edukacja Filozoficzna" 22, 149–160.

——— [199?] *Argumenty heurystyczne w teorii mnogości*, „Wiadomości Matematyczne" (przyjęte do druku).