ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XIX / 1996, s. 108–126*

Janusz MĄCZKA

MATEMATYCZNE INSPIRACJE FILOZOFII WHITEHEADA

1. MATEMATYCZNY DOROBEK WHITEHEADA

Studia w Trinity College w Cambridge rozpoczęte w 1880 r. dały Whiteheadowi możliwość zetknięcia się z wieloma problemami dyskutowanymi w matematyce na przełomie XIX i XX w. W okresie tym dokonywały się najbardziej znaczące odkrycia matematyczne, burzące wiele wcześniejszych przekonań związanych z rozumieniem samej matematyki. Matematyka tego okresu wymagała uporządkowania, jakiejś teorii, która by, jednocząc matematykę od podstaw, pozwoliła jednocześnie zachować jej status nauki pewnej. Osiągnięcie tego ideału wymagało również ponownego przemyślenia podstaw samej matematyki.

Whitehead swą naukową działalność rozpoczął właśnie od prac nad podstawami matematyki, by następnie, poprzez zainteresowania fizyką, przejść stopniowo do wielkich kwestii filozofii. Z tą ewolucją poglądów związane są przynajmniej trzy problemy, które w tym okresie zwracały na siebie uwagę Whiteheada.

Pierwszy problem był natury matematyczno–logicznej i dotyczył poszukiwania najbardziej ogólnej struktury, która by równocześnie mogła zapewnić podstawy matematyce. Te czysto matematyczne rozważania Whiteheada mają charakter konstrukcji formalnych. Podstawowymi pracami zajmującymi się tym problemem są przede wszystkim *A Treatise on Universal Algebra* z 1898 r., oraz pisane wspólnie z B. Russellem *Principia Mathematica* (1910–1913)[1]. Drugi problem, traktowany jako

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] Trzeba jednak zaznaczyć, że zbiór matematycznych prac Whiteheada nie ogranicza się do *A Treatise on Universal Algebra*(dalej jako: UA) i *Principia Mathematica*. Wiele idei, jakie pojawiły się w *Traktacie* znalazło swe uogólnienie lub rozwinięcie np. w *The Axioms of Descriptive Geometry* (1907), czy w *An Introduction to Mathematics* (1911), dalej jako: (M).

dopełnienie pierwszego, dotyczył związku matematyki z rzeczywistością. Whitehead zastanawiał się nad skutecznością struktur matematycznych w świecie materialnym lub inaczej — nad związkiem matematyki z fizyką. Zdaniem Whiteheada dobrze rozwiązane zagadnienie podstaw matematyki, przy całej swej ogólności i matematycznej abstrakcji, nie powinno jednak zatracić „jakoś” rozumianego obiektu materialnego. Liczba prac Whiteheada związanych z tym tematem jest znacznie większa niż liczba prac czysto matematycznych. Whitehead stawia ten problem w artykule *On Mathematicial Concepts of the Material World* z 1906[2] i będzie go konsekwentnie rozwijał prawie we wszystkich swoich następnych pracach.

Trzeci problem stanowi kontynuację rozważań nad drugim problemem. Różnica polega na tym, że jego rozważania przyjmują charakter bardziej ontologiczny. Podstawowe zagadnienie, które wymaga rozstrzygnięcia, sprowadza się, według Whiteheada, do pytania o podstawę skuteczności struktur matematycznych w świecie materialnym. W przekonaniu Whiteheada matematyka powinna stanowić pewną otwartą strukturę, ujawniającą poszczególne typy porządku zawarte w toczącym się procesie świata fizycznego. Ostatecznie można postawić pytanie: w jakim stopniu teoria matematyczna reprezentuje rzeczywisty porządek?[3] Nie mniej znaczące wydaje się również np. pytanie o niezależność pojęć matematycznych od naszej wiedzy o świecie, czy pytanie o prawdziwość stwierdzeń matematycznych. Pierwsze propozycje epistemologiczne związane z rozważaniami nad podstawami matematyki staną się następnie podstawą do wypracowania całościowo pojętego systemu filozoficznego. Tym pierwszym pracom towarzyszy przekonanie o jedności tego, co racjonalne, z tym, co empiryczne, przekonanie o jednolitości całego świata. Wydaje się, że dla Whiteheada założenie jednolitości jest jednym z podstawowych warunków tego, by można było analizować fakty i doświadczenia przez wyszukiwanie w nich regularności. Najpełniejszy wyraz temu przekonaniu dał on na początku *Process and Reality*, gdzie twierdzi, iż właściwe ujęcie związku pomiędzy racjonalnością a empirią stanowi konieczny warunek tego, by filozoficzny schemat spełnił swe zadanie.

Wszystkie trzy wyróżnione powyżej problemy wykazują pewną jedność, pewien logiczny układ współzależności. Skutkiem tego, w bogatym

[2] Jako następną pracę dotyczącą tego problemu można wymienić artykuł: *Space, Time, and Relativity* (1915). Szczególnie ważną pracą, również z filozoficznego punktu widzenia, jest:*An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* (1919).

[3] M. Code. *Order and Organism*, State University of New York, New York 1985, 44.

dorobku Whiteheada trudno wyróżnić niezależne wątki, czy też niezależne etapy jego pracy. Rozwój myśli Whiteheada jest wyjątkowo konsekwentny. Szczególnie ważny wydaje się związek pomiędzy jego matematycznymi propozycjami a kształtowaniem się jego poglądów filozoficznych. Zaczniemy od zwięzłego przedstawienia wczesnych matematycznych koncepcji Whiteheada (bez zagłębiania się w czysto techniczne szczegóły) ze zwróceniem uwagi na te elementy, które potem stały się inspirujące dla Whiteheadowskiej filozofii.

2. STRUKTURA ALGEBRY UNIWERSALNEJ

Algebra uniwersalna jest matematyczną propozycją Whiteheada z dziedziny uporządkowania podstaw matematyki. Podstawowym problemem, jaki został postawiony w algebrze uniwersalnej, jest wskazanie pewnej jednolitej struktury matematycznej, która mogłaby ułatwić „rozumowanie w odniesieniu do każdej dziedziny myśli lub doświadczenia zewnętrznego; rachunku, w którym następstwo myśli lub zdarzeń może być ostatecznie ustalone i precyzyjnie wyrażone”[4]. By krócej ująć tę myśl, można powiedzieć, że podstawowym zadaniem tego traktatu jest wskazanie takiej struktury matematycznej, która by porządkowała zarówno dziedzinę myśli, jak i doświadczenia.

Najbardziej ogólny zarys tej uniwersalnej struktury (*calculus*) został przedstawiony w pierwszym rozdziale *Traktatu*. Whitehead zaczyna od określenia podstawowego narzędzia, jakim będzie się posługiwał w budowaniu uniwersalnej struktury, czyli pojęcia znaku. Idąc za Stoutem, wyróżnia on trzy typy znaków[5]: znaki sugestywne, ekspresywne i substytutywne. Stout, badając zależność między ciągiem myśli a wyrażeniami językowymi, doszedł do wniosku, że myślenie jest niezależne od języka. Dowodem tego jest algebra symboliczna, która obywa się bez słów, a jest przecież formą rozumowania[6]. Zdaniem Stouta taki rodzaj niezależnego myślenia zapewnia algebrze używanie przez nią substytutywnych znaków, których podstawową charakterystyką jest to, że zastępują znaczenie tego, co oznaczają[7]. Inaczej można powiedzieć, że operacje na tych znakach nie pociągają za sobą konieczności odwoływania się do ich znaczenia. Za przykład znaku substytutywnego może służyć żeton, który po zakończeniu gry, może zostać wymieniony na pieniądze, ale podczas gry

[4]UA, viii.

[5]G.R. Stout, *Thought and Language*, „Mind” (a Quarterly Review of Psychology and Philosophy) XVI (1891), 181–205.

[6]Tamże, 182.

[7]Tamże, 187.

po prostu operuje się nim, nie myśląc o jego znaczeniu. W stosowaniu znaków ekspresywnych, przeciwnie, „uwaga nie jest skupiona na samym znaku, lecz na tym, co on wyraża, tzn. jest ona skupiona na znaczeniu (*meaning*), jaki znak przekazuje”[8]. Przykładem znaku ekspresywnego są gesty, które tylko wtedy są zrozumiałe, gdy odnoszą nas do tego, co chcą znaczyć. Znaki sugestywne natomiast są czysto umownie związane ze swoim znaczeniem. Zależnie od kontekstu i czasu mogą one za każdym razem znaczyć co innego. Za przykład znaku sugestywnego mogą służyć węzełki, jakie wiążemy na chusteczce, by nam o czymś przypominały.

Dla Whiteheada szczególne znaczenie mają znaki substytutywne, są one bowiem podstawowym narzędziem struktury uniwersalnej. Funkcjonowanie tej struktury to nic innego jak tylko sztuka manipulacji znakami substytutywnymi według przyjętych reguł i dedukowania z nich nowych zdań prawdziwych. Do tego bowiem sprowadza się wykorzystywanie rachunku matematycznego. Prawdziwą wartość taki rachunek osiąga wówczas, gdy potrafimy uchwycić podobieństwo (równoważność) operacji prowadzonych na znakach (substytutywnych) według określonych reguł do realnie istniejących rzeczy i relacji między nimi[9]. Powyższe stwierdzenie wymaga szczegółowej analizy podstawowego pojęcia, jakim jest równoważność[10]. Bez właściwego określenia równoważności nie jest możliwe dobre funkcjonowanie całej struktury uniwersalnej. Można wskazać trzy poziomy, na których równoważność funkcjonuje w strukturze uniwersalnej: na poziomie zbioru rzeczy, gdy wyróżnia się własności rzeczy, tworząc tym samym odpowiednie klasy rzeczy o danych własnościach; na poziomie struktury abstrakcyjnej, na przykład, gdy uznajemy, że dwa zdania (reprezentowane przez odpowiednie symbole) są równoważne, jeżeli daje się je wypowiedzieć przy pomocy logicznych operacji; czy wreszcie na poziomie interpretacyjnym, gdzie odpowiednia równoważność umożliwia takie ujęcie abstrakcyjnych obiektów w klasy, by można było uchwycić związek pomiędzy tymi klasami a realnymi rzeczami.

By precyzyjniej uchwycić pojęcie równoważności, Whitehead wprowadza rozróżnienie między równoważnością a identycznością[11]. Identyczność jest tylko szczególnym przypadkiem równoważności. Na przykład równoważność rzeczy nie jest tożsama z myśleniem o tej samej rzeczy w różny sposób (w takim sensie jak o 5 można myśleć jako o 2+3 lub jako 3+2). Rzeczy można uznać za równoważne — twierdzi Whitehead

[8]UA, 3.
[9]UA, 4.
[10]UA, 5–7.
[11]UA, 5.

— jeśli tworzą one dziedzinę (w sensie logicznym) pewnego powszechnego pojęcia[12]. Whitehead wyróżnia dwie cechy równoważności, które obrazowo nazywa truizmem i paradoksem. Truizm to aspekt równoważności, dzięki któremu dwie rzeczy są częściowo identyczne; paradoks zaś jest tym, co różni od siebie rzeczy równoważne[13]. Gdy równoważność jest tylko truizmem, mamy do czynienia z identycznością. Bardzo istotnym elementem tworzonej przez Whiteheada uniwersalnej struktury jest pojęcie rozmaitości. Pojęcie to jest podstawe w pierwszej fazie tworzenia uniwersalnej struktury. Spróbujmy więc bliżej scharakteryzować to pojęcie.

Rozważmy zbiór rzeczy posiadających pewną wspólną własność. Różne rzeczy mogą posiadać tę własność w różny sposób. Whitehead mówi, że rzeczy posiadają tę własność w różnych *modach*. Każdy taki mod Whitehead nazywa *elementem*. Zbiór wszystkich elementów jest, z definicji, *rozmaitością danej własności*.

Można stwierdzić istnienie różnych relacji pomiędzy jednym modem danej własności a innymi modami tej samej własności. Innymi słowy, istnieją rozmaite relacje pomiędzy różnymi elementami rozmaitości danej własności. Aksjomaty, z których można logicznie wydedukować wszystkie tego rodzaju relacje, Whitehead nazywa *charakterystykami* tej rozmaitości.

Ten ciąg definicji Whitehead ilustruje następującym przykładem. Niech rozważaną własnością rzeczy będzie ich przestrzenność. Rzeczy mogą posiadać przestrzenność w różny sposób, czyli w różnych modach; mogą mianowicie zajmować różne miejsca, czyli punkty, jeśli dopuścimy odpowiednią idealizację. A zatem każdy punkt jest pewnym modem, czyli elementem, a zbiór wszystkich punktów rozmaitością własności przestrzenności. Whitehead stwierdza, że „idea pustej przestrzeni odniesiona do osi układu współrzędnych jest przykładem rozmaitości”[14].

Whitehead zaczerpnął ideę rozmaitości od Riemanna. Na samym początku rodziału o rozmaitości[15] powołuje się on na wykład habilitacyjny Riemanna *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii* z 1854 r., w którym Riemann przedstawia konstrukcję pojęcia „wielokrotnie rozciągłej wielkości”. Riemann, wyjaśniając pojęcie rozmaitości powołuje się na J.F.Herbarta[16], który pojęcie to wprowadził przy badaniu zagadnień do-

[12]UA, 5–7.
[13]UA, 7.
[14]UA, 13.
[15]UA, 13.
[16]Filozoficzne poglądy J.F. Herbarta, jakie miały wpływ na Riemanna, zostały zawarte w dziełach Herbarta:*Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie*, Königsberg

tyczących teorii poznania i psychologii ogólnej. Herbart, nadając rozmaitości zabarwienie filozoficzno–psychologiczne, rozumiał je jako zbiór treści istniejących w świadomości podmiotu poznającego, lub inaczej, jako zbiór określeń jakiejś zmiennej rzeczywistości. Bliżej, pojęcie to można określić jako zbiór treści istniejących w podmiocie poznającym, które są odbiciem stanów zmieniającego się przedmiotu znajdującego się w polu postrzegania podmiotu. Riemann, idąc za Herbartem, nadaje rozmaitości bardziej matematyczne znaczenie i definiuje rozmaitość jako zbiór sposobów oznaczania[17], które to „[...] sposoby oznaczania, w zależności od tego, czy pomiędzy nimi istnieje ciągłe przejście od jednego do drugiego, czy nie, tworzą ciągłą lub dyskretną rozmaitość”[18].

Zainteresowanie Whiteheada Riemannowskim pojęciem rozmaitości ma różne uwarunkowania. Riemann uważa, że „utworzenie pojęcia wielkości jest możliwe tylko wtedy, gdy istnieje ogólne pojęcie dopuszczające różne sposoby oznaczania”[19], czyli wtedy, gdy możemy utworzyć „zbiory stanów”[20] dla zmiennej rzeczywistości. W podobny sposób, jak widzieliśmy, Whitehead określił pojęcie rozmaitości. Dla Riemanna pojęcie to było „środowiskiem” do badania tak pozornie oddalonych od siebie tworów, jak np: wielkości geometryczne, czas, zbiór barw i dźwięków. Dla Whiteheada była to podstawowa idea jego struktury uniwersalnej.

Jak widzieliśmy, pojęcie rozmaitości Whitehead zapożyczył od Riemanna, który wprowadził je w wykładzie habilitacyjnym w sposób poglądowy i dość daleki od matematycznej precyzji. Szkoda, że Whitehead najwyraźniej spiesząc się, by przejść do wprowadzenia uniwersalnej struktury, nie poświęcił uściśleniu pojęcia rozmaitości więcej uwagi. Uczynił to dopiero Weyl w roku 1912[21]. Obecnie używana definicja rozmaitości pochodzi od Whitneya[22]. W pracach tych autorów rozma-

1813, a szczególnie w: *Psychologie als Wissenschaft, neugegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik*, Königsberg 1824–25.

[17] Precyzyjne wyjaśnienie tej definicji można znaleźć w pracy licencjackiej J. Dembka: *Wykład habilitacyjny Bernharda Riemanna „O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii” — rozważania historyczno–metodologiczne*, PAT, Kraków 1988.

[18] B. Riemann, *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii*, tłum. J. Dembek, „Matematyka — Społeczeństwo — Nauczanie” 4 (I 1990), 23.

[19] Tamże, 23. Przez „sposoby oznaczania” oddajemy niemiecki termin *Bestimmungsweisen* przyjęty przez Riemanna. Odpowiada on Whiteheadowskiemu *mody* lub *elementy.*

[20] Zbiór stanów w jednym przypadku oznacza zbiór treści istniejących w świadomości podmiotu poznającego lub werbalnie, zbiór określeń jakiejś zmiennej rzeczywistości, w drugim przypadku oznacza odbicie zmieniających się stanów przedmiotu w świadomości podmiotu. Por. J. Dembek. *Wykład habilitacyjny* ..., 25.

[21] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Leipzig 1913.

[22] H. Whitney, *Differentiable Manifolds*, „Ann. Math.” 37 (1936), 645–680.

itość staje się pojęciem czysto formalnym, bez żadnych odniesień do zmysłowego postrzegania. Jest to dziś podstawowe pojęcie geometrii różniczkowej[23].

Zdefiniowanie rozmaitości jest pierwszym etapem tworzenia struktury uniwersalnej. Jednak charakter takich rozmaitości jest dość ograniczony, obejmuje ona tylko takie klasy własności, które są możliwe do uchwycenia na podstawie empirycznego doświadczenia. Rozmaitościom tym brak jest „uniwersalnego rozszerzenia”. Uniwersalna struktura, by stanowić podstawę dla całej matematyki, musi być tak ogólna, aby przy jej pomocy można było otrzymywać nowe obiekty, które niekoniecznie mają jakikolwiek związek z empirycznym konkretem.

Następnym więc etapem tworzenia struktury uniwersalnej jest wygenerowanie z różnorodnych klas rozmaitości takiej struktury, której obiektami będą znaki substytutywne. Znaki substytutywne należy tu rozumieć jako symbole algebraiczne[24]. Manipulacja substytutywnymi znakami to nic innego jak manipulacja symbolami algebraicznymi. Przez tę manipulację Whitehead rozumie rachunek (w sensie logicznym) wykonywany na znakach.

Manipulacja substytutywnymi znakami, czyli symbolami algebraicznymi, ma rozszerzyć naszą wiedzę na nieznane wcześniej obiekty, co stwarza nowe możliwości interpretacyjne dla uniwersalnej struktury.

Istotną cechą takiej struktury jest więc możliwość uzyskiwania, na podstawie przyjętych reguł, zupełnie nowych obiektów, które nie były „widoczne” na uprzednich etapach konstrukcji. Otrzymywanie nowych obiektów abstrakcyjnych jest połączone z koniecznością zachowania zarówno związku z otrzymanymi wcześniej obiektami niższego poziomu, jak i relacji między nimi na abstrakcyjnym, wyższym poziomie. Właśnie ralacje między obiektami różnych poziomów, reguły rozumowania, oraz pojęcie równoważności stanowią podstawę funkcjonowowania struktury uniwersalnej. Można powiedzieć, że nowy obiekt jest „syntezą”, nałożeniem się na siebie, różnorodnych relacji, oraz wynikiem przyjętego określenia równoważności.

Można teraz bliżej określić skutek rozszerzania struktury uniwersalnej poprzez tworzenie nowych obiektów. Możliwość otrzymywania nowych obiektów, jako skutek pewnych operacji na wcześniej uzyskanych obiektach, ma dwie konsekwencje, a mianowicie możliwość osiągnięcia szerokiego spektrum nowych obiektów, co jest zrozumiałe samo przez się,

---

[23]Na temat historii pojęcia rozmaitości por. E. Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriff von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, Boston — Basel — Stuttgart 1980.

[24]UA, 8–9.

oraz ciągłe pozostawanie w pewnej jedności poprzez zachowanie związków z uprzednio istniejącymi obiektami. Jest to swoiste budowanie pewnej struktury hierarchicznej, której podstawą są najbardziej oczywiste obiekty, a wynikiem końcowym obiekty najbardziej złożone.

Ta charakterystyka uniwersalnej struktury pozwala również zauważyć, że dla Whiteheada o wiele ważniejsze są relacje i reguły wnioskowania niż same obiekty. Trudno byłoby jednak stwiedzić, że jedynie formalny system reguł jest przedmiotem rozważań Whiteheada. Bardziej precyzyjne wydaje się stwierdzenie, że rozważania prowadzone w *Traktacie* zacierają granice między formalnym aspektem syntaktycznym a interpretacyjnym aspektem semantycznym[25].

3. DROGA DO STRUKTURY UNIWERSALNEJ

Whitehead strukturę algebry uniwersalnej traktuje jako pewną możliwość połączenia algebry i geometrii. Nie chodzi tutaj o jakiś typ redukcji algebry do geometrii, czy odwrotnie. Droga, jaką podejmuje Whitehead, wiedzie od przestrzeni geometrycznej, ujmującej relacje między rzeczami postrzeganymi do abstrakcyjnie ujętych warunków geometrycznych, które określają relacje między dowolnymi grupami obiektów[26]. Przejście na ten wyższy poziom abstrakcji nie może się jednak dokonać bez włączenia w cały schemat reguł algebraiczno–logicznych. Whitehead chce tym sposobem wygenerować taki typ rozszerzonej przestrzeni, która by mogła być podstawą dla konstruowania np. innych algebr czy geometrii.

Podjęte rozważania nad związkiem geometrii z algebrą i ukazania możliwie uniwersalnej struktury łączą Whiteheada najpierw z Kartezjuszem[27], a następnie z Leibnizem. Kartezjusz, zdaniem Whiteheada, dokonał udanej próby połączenia algebry i geometrii. Whitehead we *Wstępie do matematyki* w rodziale poświęconym geometrii analitycznej wskazuje na pewne zalety tej geometrii. Kartezjusz w swej pracy poświęconej geometrii, dołączonej do *Rozprawy o metodzie* z 1637 r., wykazał, że stałe stosunki między współrzędnymi można wyrazić za pomocą funkcji algebraicznych, oraz wskazał, że funkcje te odpowiadają pewnym klasom krzywych. Whitehead powie, że istotą geometrii Kartezjusza jest „[...] utożsamienie związków algebraicznych z miejscami geo-

[25] C. Mangione, S. Bozzi, *Storia della logica*, Milano 1993, 196.

[26] A.N. Whitehead, *Nauka i świat nowożytny* (dalej jako: SMW), tłum. M. Kozłowski, M. Pieńkowski, Kraków 1987, 46–47.

[27] M. Hampe, *Einleitung: Whiteheads Entwicklung einer Theorie der Ausdehnung*, w: *Process, Gefühl und Raum–Zeit.* hrsg. von M. Hempe und H. Maassen, Frankfurt am Main 1991, t. I, 223.

metrycznymi. Punktowi na płaszczyźnie odpowiadają w algebrze dwie współrzędne x i y, a własnościom punktów miejsca geometrycznego[28] odpowiadają algebraiczne związki między x i y"[29]. Tak ujęta geometria analityczna stała się możliwa dzięki wynalezieniu przez Kartezjusza ogólnej metody ustalania związków między wielkościami geometrycznymi i algebraicznymi. Rozwój matematyki to — zdaniem Whiteheada — rozwój pojęć, a nie pomnażanie twierdzeń.

Inną zaletą geometrii Kartezjusza jest ilustracja jak „[...] poszczególne gałęzie matematyki przenikają się nawzajem i mają wspólne pojęcia"[30]. Dalsze prace nad precyzyjnym ujęciem geometrii analitycznej, a szczególnie prace z XIX w., wykazały jej dość wąski zakres. Okazało się, że propozycje Kartezjusza napotykają na istotne trudności, które uniemożliwiają szersze wykorzystanie metody kartezjańskiej. Zdaniem Hermana Weyla dopiero zastąpienie w kartezjańskiej geometrii analitycznej liczb (współrzędnych) o wiele bardziej wartościowym obiektem geometrycznym, jakim jest wektor, stało się krokiem przełomowym[31]. Ta istotna przemiana dokonała się dzięki pracom Hamiltona, któremu udało się zdefiniować pojęcie zbioru wektorów (przestrzeni wektorowej) jako pewnej struktury algebraicznej. Dla Whiteheada był to pierwszy impuls do matematycznych poszukiwań.

Innym komplementarnym rozwiązaniem problemu związku geometrii z algebrą, w którym niemniej istotną rolę odgrywało pojęcie wektora, były prace Grassmanna. Badając kontinuum n–zmiennych $x, ...x_n$ doszedł on do uogólnienia geometrii euklidesowej. Istotną częścią jego pracy było zdefiniowanie pewnych podstawowych pojęć liniowych, takich jak punkt, prosta, płaszczyzna. Pojęcia te, tworzone zgodnie z zasadą dualności, powstają jako wynik ograniczania pewnego nieograniczonego uprzednio tworu. Np. wektor jest rodzajem „swobodnego odcinka" otrzymanego poprzez „wycięcie" go z nieograniczonej linii oraz mogącego poruszać się (podlegać przekształceniom) w przestrzeni. Wynikiem tych zabiegów była algebra wymiaru skończonego lub nieskończonego nad ciałem liczb rzeczywistych, zdefiniowana za pomocą generatorów i relacji[32].

[28]Miejsce geometryczne jest to linia (powierzchnia, czy zbiór linii lub powierzchni), której wszystkie punkty posiadają jakąś własność, żaden zaś inny punkt płaszczyny (lub przestrzeni) tej własności nie posiada. Zob. A.N. Whitehead, *Wstęp do matematyki* (M), tłum. W. Wojtowicz, Warszawa — Lwów 1914, 103–104.

[29]M, 104.

[30]M, 99.

[31]H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, München 1948, 92.

[32]Por. N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, tłum. S. Dobczycki, PWN, Warszawa 1980, 150.

Grassmann wychodzi od koncepcji geometrycznej, a konkretnie od przestrzeni wektorowej n–wymiarowej, definiując w niej podstwawowe pojęcia, które następnie wykorzystuje jako narzędzie do badania problemów algebry liniowej, rozszerzając tym samym zakres obiektów[33]. Pracuje on zatem według schematu: geometria — algebra — inne geometrie i algebry. Schemat ten najlepiej oddaje również schemat traktatu Whiteheada o algebrze uniwersalnej. Dla Whiteheada najistotniejszą częścią propozycji Grassmanna była teoria rozciągłości; pozwala ona bowiem generować nowe obiekty, które nie były „widoczne" na uprzednich etapach. Rozwiązania Grassmanna można uznać za początek geometrii liniowej, która następnie w pracach Cayleya i Sylvestra znalazła swą kontynuację poprzez połączenie tej geometrii z geometrią rzutową, stając się przez to rodzajem geometrii uniwersalnej[34]. Whitehead wykorzystał prace Cayleya i Sylvestra do dalszych badań nad swą uniwersalną strukturą. Uważał on bowiem, że teoria rozciągłości Grassmanna i oszacowania Hamiltona mogą służyć za podstawę do dalszych poszukiwań. W tym samym nurcie badań nad związkiem algebry z geometrią znalazły się również — zdaniem Whiteheada — prace Leibniza. Leibniz uznał, że regułom rozumowania (metodzie) Kartezjusza brak jest logicznego zabezpieczenia. Postanowił więc poszukać uniwersalnych i jednoznacznych zasad, które by pozwoliły uniknąć wszelkich błędów w rozumowaniu. Leibniz mówi, że „prawdziwa metoda powinna nam dostarczyć [...] pewnego sposobu konkretnego i prostego, który by prowadził umysł, tak jak są nimi linie kreślone w geometrii i wzory działań, które podaje się uczącym arytmetyki. Bez tego umysł nasz nie mógłby bez błądzenia przebyć dłuższej drogi"[35].

Realizację tego programu oparł Leibniz na algebrze. Stworzenie pewnego sformalizowanego języka, w którym ważniejszą rolę odgrywałyby powiązania między znakami niż same znaki, dawałoby nadzieję, że proste algebraiczne rachunki będą rozstrzygające dla pojawiających się problemów. Projekt Leibniza szedł jeszcze dalej: chciano w nim otrzymać pewien rodzaj *calculus ratiocinator* — rachunku, który w połączeniu z logiką symboliczną mógłby działać jak maszyna produkująca twierdzenia prawdziwe w każdej dziedzinie wiedzy. Leibniz projektu tego nie zrealizował, ale jego pomysł był na tyle ciekawy, że stał się inspiracją dla następców. Istotny postęp dokonał się dopiero, gdy G. Boole otrzymał lepsze rozwiązania w logice symbolicznej, rozwijając rachunek zdań. Rachunek

[33] N. Bourbaki, *Elementy* ..., 84.
[34] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 1994, 218–219.
[35] Za N. Bourbaki, *Elementy historii* ..., 14.

Boole'owski stanowił postęp, ale formalizm jego nie był przystosowany do całej matematyki. Dopiero prace logików Fregego, C.S. Peirce'a, oraz Peano dostarczyły matematyce podstawowego narzędzia, swoistego języka, w którym można było zapisać wszystkie rezultaty najważniejszych dziedzin matematyki[36].

Dla Whiteheada najbardziej inspirujące są prace Boole'a z 1854, oraz Peirce'a z 1867. Z pracami Fregego i Peano zaznajomi się on później, rozpoczynając współpracę z Russellem nad *Principia Mathematica*.

Powyższe stwierdzenia jasno pokazują, dlaczego Whitehead prace nad poszukiwaniem podstaw matematyki oparł na algebrze. Podobnie jak Leibniz, Whitehead potrzebował uniwersalnego języka, tak uniwersalnego, by mógł on stać się podstawowym nie tylko dla matematyki, ale również dla wszelkiego typu rozumowania. *Traktat o algebrze uniwersalnej* stanowi próbę realizacji tego programu. Konstrukcja algebry uniwersalnej w oparciu o formalizm algebraiczno–logiczny jest dla Whiteheada poszukiwaniem takiego właśnie języka. Zamysł stworzenia algebry uniwersalnej był bardzo ambitny i z matematycznego punktu widzenia bardzo trafny, ale sytuacja w matematyce nie dojrzała jeszcze do jego realizacji. Przede wszystkim należało się pozbyć w koncepcji matematyki wszelkich odniesień do tych elementów, które nie są czysto–formalne. *Traktat o algebrze uniwersalnej* należy traktować jako nakreślenie ambitnego programu, który Whiteheadowi udało się zrealizować jedynie w niewielkim stopniu. Rozwój algebry abstrakcyjnej, którą dziś niekiedy nazywa się algebrą uniwersalną, datuje się od prac Birkhoffa z lat trzydziestych. Przez algebrę uniwersalną rozumie się dziś „badanie skończonych operacji na zbiorze, którego celem jest określenie i wykrycie własności, które są wspólne takim strukturom algebry jak: pierścienie, ciała, algebry Boole'a, kraty i grupy[37]". Po pracach Birfkhoffa nastąpił szybki rozwój algebry abstrakcyjnej. Istnieje dziś licząca się tendencja do zalgebraizowania całej matematyki.

4. NATURA MATEMATYKI

Prace Whiteheada nad podstawami matematyki na drodze skonstruowania algebry uniwersalnej wymagały określenia natury matematyki. Próba oparcia podstaw matematyki na algebrze uniwersalnej wzbudzała bowiem kontrowersje matematyków i logików. Zdaniem Whiteheada zarówno matematycy, jak i logicy nieufnie patrzyli na skuteczność tego

[36] Por. N. Bourbaki, *Elementy historii ...*, 13–19.

[37] G. Grätzer, *Universal Algebra*, D. Van Nostrand Company, INC., 1968, v.

programu[38]. Matematycy uważali, że już na samym początku włączenie do algebry uniwersalnej logiki symbolicznej w istotny sposób ograniczało możliwości podjętego zadania. Zwłaszcza matematycy o formalistycznej orientacji nie mogli zaakceptować pewnego zatarcia różnicy między aspektem formalnym a realnym w matematyce. Dla logików natomiast zbyt silny kontekst matematyczny zdawał się być niejasny. Whitehead, nie wchodząc w spory ani z matematykami, ani z logikami, rozwiązanie zadania widzi w takim określeniu natury matematyki, by konstrukcja algebry uniwersalnej dała się obronić.

Określenie natury matematyki, jakie Whitehead zawarł we wstępie do *Traktatu o algebrze uniwersalnej*, zdaje się eliminować powyższą trudność. Zdaniem Whiteheada natura matematyki „[...] w swym najszerszym znaczeniu jest rozwinięciem wszelkich typów rozumowania formalnego, koniecznego i dedukcyjnego"[39]. W następnych pracach Whiteheada to określenie matematyki przyjmie bardziej filozoficzne zabarwienie. Whitehead będzie podkreślał szczególnie abstrakcyjny, ogólny i logiczny charakter matematyki. Np. w *Nauce i świecie nowożytnym* napisze: „Oryginalność jej [matematyki] polega na tym, że w naukach matematycznych ujawniane są stosunki pomiędzy rzeczami będące skrajnie — jeśli abstrahować od działalności rozumu ludzkiego — nieoczywiste"[40], lub „mowiąc 'matematyka', mamy na myśli naukę poświęconą badaniom nad liczbą, ilością, geometrią, a w czasach nowszych obejmującą rownież badania nad bardziej jeszcze abstrakcyjnymi pojęciami porządku i podobnymi rodzajami czysto logicznej relacji. [...] Zajmując się czystą matematyką jesteśmy w królestwie całkowitej, bezwzględnej abstrakcji"[41]. Najbardziej ogólny wniosek narzuca się natychmiast: tak rozumiana natura matematyki jest dla Whiteheada najlepszą podstawą dla scharakteryzowania tej dziedziny naszego poznania, która zajmuje się „[...] wyszukiwaniem pierwiastków ogólnych i stałych w zjawiskach poszczególnych i zmiennych"[42].

Spróbujmy przyjrzeć się jednak poszczególnym elementom określenia natury matematyki zawartego w *Traktacie o algebrze uniwersalnej*.

Wskazanie w określeniu natury matematyki na *formalne* związki między obiektami danej struktury zakłada, że dla Whiteheada znaczenia nie są właściwym przedmiotem zainteresowania. Nie należy jednak uważać Whiteheada za zwolennika radykalnego formalizmu, w którym matema-

[38]UA, vi.
[39]UA, vi.
[40]SMW, 44.
[41]SMW, 46.
[42]M, 3–4.

tykę traktuje się jedynie jako grę symboli. Symbol spełnia w matematyce istotną rolę, pozwala bowiem wznieść się na ten stopień ogólności, który przekracza ramy doświadczenia. Co więcej, oderwanie się od doświadczenia przez zastosowanie symboliki pozwala swobodnie zastosować reguły logicznego rozumowania. Tutaj pojawia się drugi element określenia natury matematyki. Reguły, za którymi podąża nasze rozumowanie, mają cechę wnioskowania *koniecznego*. Można więc przypuszczać, że ten typ rozumowania będzie najbardziej przybliżał nas do prawdy. Byłoby jednak dużym uproszczeniem uznanie matematyki za bezpośrednio związaną z prawdą. Whitehead jest w pełni świadom takiego uproszczenia. Abstrakcyjne struktury matematyczne mają być rozpatrywane jako konstrukcje z zakresu możliwości.

Istotną cechą stosowania konstrukcji symbolicznych jest ich precyzja i przejrzystość. Rozumowanie ma być *dedukcyjne*, tzn. oparte o definicje, od których wymaga się tylko wewnętrznej niesprzeczności. Definicje te są pewnymi ograniczeniami, tzn. właściwości definiowanej rzeczy mają być rozważane ze względu na te cele dyskusji i tylko te, które są zawarte w definicjach[43]. Matematyczne definicje albo posiadają egzystencjalne odniesienie do rzeczywistości (*existential import*), albo są konwencjonalne. Definicje z „egzystencjalnym odniesieniem" chociaż są wynikiem aktów czystej abstrakcji, stanowią punkt wyjścia w matematyce stosowanej i wymagają czegoś więcej niż tylko testu niesprzeczności, wymagają mianowicie pewnego odniesienia do rzeczywistości. A więc matematyka stosowana nie jest nauką czysto dedukcyjną. Typ definicji bez egzystencjalnego odniesienia jest konwencjonalny i jest generowany w akcie wyobraźni. Takie definicje funkcjonują w matematyce czystej. Whitehead nie jest zwolennikiem ostrego rozróżnienia na definicje konwencjonalne i na definicje z odniesieniem egzystencjalnym. Jego zdaniem, aby matematyka miała jakąkolwiek wartość, obiekty powołane do bytu na mocy definicji konwencjonalnych muszą mieć pewne pokrewieństwo z własnościami rzeczy istniejących[44]. Do określenia natury matematyki Whitehead powrócił w haśle „matematyka" opracowanym dla Encyklopedii Brytyjskiej[45] (wydanie z 1911 r.). W haśle tym definiuje on matematykę jako „[...] naukę zajmującą się logicznym wyprowadzaniem konsekwencji z ogólnych przesłanek wszelkiego rozumowania"[46].

[43]Zob. UA, vii.

[44]UA, vii.

[45]A. N. Whitehead, *Mathematics*, w: *Encyclopedia Britannica*, 1911, 11. Aufl., Bd.17, 878–883.

[46]Tamże, 880.

Historia najnowszej matematyki pokazuje, że funkcje, operacje, przekształcenia, podstawienia, odpowiedniości itp. są tylko nazwami różnych typów relacji. Stąd też nowoczesne ujęcie matematyki, zdaniem Whiteheada, mniej mówi o „liczbie" i „ilości", kładąc większy nacisk na formę i strukturę. Pojęcie liczby pozostanie oczywiście w centrum zainteresowań matematyki, ale badanie liczb i ich własności musi być umieszczone w szerszym kontekście niż tylko sama teoria liczb.

Różnica między matematyką czystą a stosowaną sprowadza się do różnicy metody. W matematyce czystej dane są założenia, a poszukuje się ich interesujących konsekwencji. W matematyce stosowanej dane są wnioski w postaci świadectw doświadczalnych dostarczanych przez nauki empiryczne, a poszukuje się „dedukcji", z których te wnioski by wynikały[47].

Najważniejszym zainteresowaniem matematyki jest oczywiście fizyka. Whitehead pisze: „każda gałąź fizyki jest polem zainteresowań matematyki"[48]. Następnie Whitehead wygłasza bardzo nowoczesną myśl: „można zaryzykować przepowiednię, że w przyszłości wszystkie te zainteresowania połączą się w jedną matematyczną teorię hipotetycznej struktury wszechświata, tę samą dla wszystkich różnorodnych zjawisk"[49].

5. ALGEBRA UNIWERSALNA A PÓŹNIEJSZA FILOZOFIA WHITEHEADA

Powyższe rozważania pokazują, że pomiędzy późniejszą Whiteheadowską metodą filozofowania a *Traktatem o algebrze uniwersalnej* istnieje ścisły związek. Traktat ten zaciążył na myśleniu Whiteheada do tego stopnia, że następne jego prace zarówno z matematyki, z fizyki, jak i filozofii będą w mniejszym lub większym stopniu odzwierciedlały schemat algebry uniwersalnej.

Zarówno tematy rozwijane przez Whiteheada w *Traktacie*, jak i cele, jakie zostały tam określone, zmierzały do skonstruowania uniwersalnej struktury, która by mogła stać się podstawą dla matematyki. Jest rzeczą ciekawą, że gdy myślano o podstawach matematyki, to szukano ich poprzez wskazanie najprostszych elementów, np. w teorii mnogości (Cantor), czy w teorii liczb (Kronecker). Whitehead poszedł w zupełnie innym kierunku. Poszukiwał mianowicie możliwie najogólniejszej struktury, z której można byłoby otrzymać poszczególne działy matematyki jako jej szczególne przypadki. Ten sposób szukania podstaw sprawił, że

[47] Por. A. N. Whitehead. *Mathematics* ..., s. 882.
[48] Tamże, 882.
[49] Tamże, 882.

Whiteheada można zaliczyć do prekursorów współczesnej algebry abstrakcyjnej.

Sposób, w jaki Whitehead przedstawia swój plan algebry uniwersalnej we wstępie i w następnych rozdziałach *Traktatu*, zapowiada, a może nawet wyjaśnia, poźniejszą metodę filozofowania. Zamiast szukania aksjomatów i definicji, jak to się zazwyczaj robi w matematyce, Whitehead opisuje wprowadzane pojęcia słownie, często korzystając z analogii i obrazowych skojarzeń. Niektóre z tak wprowdzonych na początku *Traktatu* pojęć Whitehead w następnych częściach definiuje precyzyjnie, zgodnie z matematycznym zwyczajem, ale nawet gdy tego nie robi, jego słownym omówieniom towarzyszy znajomość odpowiedniej struktury matematycznej. Rozważmy przykład. Whitehead we wstępie szeroko omawia pojęcie równoważności, wyróżniając w nim „paradoks" i „truizm". Cały czas Whitehead ma na myśli to, co dziś nazywa się relacją równoważności; pojęcie to ma precyzyjną matematyczną definicję, która jest Whiteheadowi (przynajmniej *implicite*) znana. Matematyczna definicja relacji równoważności doskonale obchodzi się bez metafor truizmu i paradoksu. Jednak metafory te są pomocne, gdy ktoś nie zna definicji matematycznych. W swojej filozofii Whitehead stosował potem podobną metodę. Pewne pojęcia wprowadzał za pomocą słownych omówień, posługując się terminologią, która ułatwiała skojarzenia. Jednak w filozofii pojęciom tym nie towarzyszyła żadna formalna struktura (za wyjątkiem pewnych prób w *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* z 1919 r.), co oczywiście otwierało drogę do wielości interpretacji.

Konsekwencje wczesnej pracy matematycznej Whiteheada w jego późniejszej filozofii idą dalej niż wyżej wspomniane czysto formalne analogie. Jeżeli przypomnimy sobie często przytaczany cytat Whiteheada z jego *Process and Reality,* „zadaniem filozofii spekulatywnej jest dążenie do zbudowania koherentnego, logicznego, koniecznego systemu ogólnych idei, w ramach którego można zinterpretować każdy element rzeczywistości"[50], to łatwo zauważymy, że jest on uderzająco podobny do określenia celów struktury uniwersalnej: powinna ona ułatwiać rozumowania w każdej dziedzinie myśli lub zewnętrznego doświadczenia, w którym następstwo myśli lub zdarzeń może być definitywnie sformułowane i dokładnie stwierdzone[51]. Tak więc filozofia spekulatywna ma spełniać w dziedzinie filozofii analogiczną funkcję, jak struktura uniwersalna w matematyce. Już dla struktury uniwersalnej Whitehead przewiduje funkcję wykraczającą poza matematykę, ma ona bowiem odnosić się także do zewnętrz-

[50] A. N. Whitehead, *Process and Reality*, New York 1978, 3.
[51] Por. przypis 4.

nego doświadczenia i tych dziedzin myśli, które mogą być wyrażone odpowiednio ściśle.

Algebra uniwersalna jest jeszcze pod innym względem podobna do metafizyki Whiteheada. Jak widzieliśmy, ważniejszą rolę w algebrze uniwersalnej odgrywają relacje niż obiekty, pomiędzy którymi te relacje zachodzą. Myśl ta znalazła swoją filozoficzną realizację w metafizyce procesu. Struktura procesu „składa” się wprawdzie z bytów aktualnych (aktualnych zaistnień), jako swoistych nietrwałych obiektów, ale byty aktualne całą swą bytowość czerpią z relacji, w jakie wchodzą ze wszystkimi innymi bytami aktualnymi.

*

Prawdą jest, że Whitehead rozpoczął swoją drogę w kierunku metafizyki od dokonań w dziedzinie matematyki, a konkretnie w dziedzinie algebry abstrakcyjnej. Już jednak na tym wstępnym etapie drogi ujawniły się te cechy jego myślenia, które, przy dobrym rozwinięciu, doprowadzą do analiz metafizycznych. Jest to widoczne zarówno w ambitnym programie matematycznym, jaki Whitehead przed sobą postawił, jak i w stylu realizacji tego programu. I w matematyce, i w metafizyce cele pozostaną te same — stworzyć uniwersalny schemat, w którym wszystkie szczególne przypadki znalazłyby swoje ostateczne wyjaśnienie. Także i styl pracy pozostanie ten sam, ulegając jedynie koniecznym przystosowaniom. Wprawdzie, pomimo pewnych prób, nie udało się Whiteheadowi przedstawić swojej filozofii w postaci sformalizowanej, ale metafizyczny system Whiteheada bardzo przypomina formalną konstrukcję. Droga Whiteheada od algebry uniwersalnej do metafizyki procesu jest bardziej logiczna i konsekwentna, niż by się to na pierwszy rzut oka mogło wydawać.