ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XIX / 1996, s. 101–107*

Alfred North WHITEHEAD

ZAŁOŻENIA ALGEBRY UNIWERSALNEJ[1]

W swym zamierzeniu niniejsza książka pragnie przedstawić w sposób możliwie pełny badania dotyczące różnych systemów rozumowania symbolicznego (*Symbolic Reasoning*) powiązanych z algebrą zwykłą (*ordinary Algebra*)[2]. Głównymi przykładami takich systemów są kwaterniony Hamiltona, rachunek rozciągłości Grassmanna[3] i logika symboliczna Boole'a. Algebry te same w sobie zasługują na oddzielne, niezależne studium; niemniej warto również dokonać ich studium porównawczego w celu rzucenia światła na ogólną teorię rozumowania symbolicznego, a w szczególności na [zagadnienie] symbolizmu algebraicznego.

Analizy porównawcze w sposób konieczny zakładają przeprowadzenie uprzednich niezależnych badań, jako że nie można dokonywać porównań bez [posiadania] wiedzy. Zgodnie z tym założeniem, w księdze I niniejszego tomu przedstawione zostaną ogólne zasady dotyczący całości zagadnienia, natomiast pozostałe księgi są poświęcone oddzielnej analizie algebry logiki symbolicznej i rachunku rozciągłości Grassmanna oraz powiązanych z nimi idei. Miejsce wyjątkowe zostało przyznane idei uogólnionego pojęcia przestrzeni w przekonaniu, że właściwości i operacje, jakie z tą ideą się wiążą, mogą zostać wykorzystane w celu stworzenia jednolitej metody interpretacji rozmaitych algebr. Pragnę zatem przedstawić w tej pracy wspomniane algebry, zarówno jako systemy symboliczne, jak też jako narzędzia pozwalające badać możliwości myśli i rozumowania

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] Jest to fragment wstępu książki A. N. Whiteheada, *A Treatise on Universal Algebra*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1898. Tytuł pochodzi od tłumacza. Przypisy oznaczone gwiazdką pochodzą od autora, pozostałe od tłumacza. Nawiasy kwadratowe zawierają słowa, które zostały dodane do tłumaczenia w celu lepszego zrozumienia tekstu.

[2] Whitehead ma na myśli algebrę tradycyjną zajmującą się głównie rozwiązywaniem równań i w ogólności liczbami rzeczywistymi.

[3] Grassmann napisał pracę pt. *Ausdehnungslehre*, co tłumaczone bywa na język polski jako „teoria rozciągłości": zob. M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 1994, 198. Whitehead używa jednak wyrażenia *calculus of extension*.

w odniesieniu do abstrakcyjnej, ogólnej idei przestrzeni. Jedność przedmiotu odniesienia interpretacji [poszczególnych] algebr dostarczy nam naturalnego sposobu (*mode*) ich porównywania. Szczegółowe porównanie ich struktur symbolicznych zostanie przedstawione w tomie drugim, gdzie zamierzamy badać kwaterniony, macierze i ogólną teorię algebr liniowych. Taka porównawcza anatomia zagadnienia została zapoczątkowana referatem B. Peirce'a na temat algebry liniowej łącznej (*Linear Associative Algebra*)[4] i była rozwijana ostatnio w Niemczech.

Wiele kłopotu sprawiło mi znalezienie ogólnej nazwy dla omawianego zagadnienia. Przyjęte ostatecznie określenie *Universal Algebra* (algebra uniwersalna) było już używane w nieco podobnym znaczeniu przez Sylvestra w tekście: *Lectures on the Principles of Universal Algebra* (*Wykłady o zasadach algebry uniwersalnej*) opublikowanym w „American Journal of Mathematics", t. VI, 1884. Tekst ten jednakże, pomijając jego sugestywny tytuł, traktuje *explicite* wyłącznie o macierzach.

Wielu matematyków patrzy z pewną podejrzliwością na algebrę uniwersalną, uważając, iż nie posiada ona wartości dla matematyki i jako narzędzie badania jest stosunkowo bezużyteczna. Faktycznie, pod tym względem logika symboliczna była szczególnie pechowa, gdyż odrzucało ją zarówno wielu logików twierdząc, że ma ona znaczenie [wyłącznie] matematyczne, jak i wielu matematyków, twierdząc [z kolei], że ma ona znaczenie wyłącznie logiczne. Nie będę na tyle nieroztropny, by wkraczać w spory logików. Podobnie natura zainteresowań odczuwanych przez poszczególnych matematyków nie poddaje się abstrakcyjnej argumentacji. Można natomiast pokazać, jak mi się wydaje, że algebra uniwersalna posiada równie ważne racje jak każda inna gałąź matematyki, by rościć sobie prawo do bycia poważnym przedmiotem badań matematycznych. By wykazać jednak to prawo algebry uniwersalnej, należy wpierw zająć się pokrótce zasadniczą naturą matematyki.

W swym najszerszym znaczeniu matematyka jest rozwinięciem wszelkich typów rozumowania formalnego, koniecznego i dedukcyjnego.

Rozumowanie jest formalne w tym sensie, że znaczenie zdań nie stanowi przedmiotu badania. Jedynym przedmiotem zainteresowania matematyki jest inferencja [jednego] zdania z [innego] zdania. Uzasadnienie reguł inferencji w poszczególnych działach matematyki nie należy właściwie do matematyki: to zadanie dla doświadczenia lub filozofii. Zadaniem

[4] Po raz pierwszy przedstawiony przed National Academy of Sciences w Waszyngtonie, 1871 i następnie opublikowany w *American Journal of Mathematics*, t. IV, 1881.

matematyki jest po prostu stosować się do reguły. W tym sensie wszelkie rozumowanie matematyczne jest konieczne: jest zastosowaniem reguły.

Rozumowanie matematyczne jest dedukcyjne w tym sensie, że bazuje ono na definicjach, które, w tej mierze, w jakiej chodzi o poprawność (*validity*) rozumowania (pomijając wszelkie odniesienia egzystencjalne (*existential import*)), winny być poddawane wyłącznie sprawdzeniu ich wewnętrznej niesprzeczności (*need only the test of self–consistency*). Zatem żadna zewnętrzna weryfikacja definicji nie jest potrzebna w matematyce dopóty, dopóki rozpatrujemy ją wyłącznie jako matematykę. Przedmiot (*subject–matter*) niekoniecznie jest przedstawiany umysłowi pierwotnie poprzez definicje: niemniej żadna idea, która nie została w sposób wyczerpujący zdefiniowana w zakresie tego, co dotyczy jej relacji z innymi ideami związanymi z danym przedmiotem, nie może być włączona w [tok] rozumowania. Definicje matematyczne należy zawsze traktować zarówno jako ograniczenia, jak i jako definicje; mianowicie, wykorzystując w argumencie cechy zdefiniowanej rzeczy, należy stosować je wyłącznie w takim zakresie, w jakim zostały one określone w definicjach.

Definicje matematyczne albo posiadają odniesienie egzystencjalne, albo są konwencjami. Definicja matematyczna z odniesieniem egzystencjalnym stanowi rezultat aktu czystej abstrakcji. Definicje tego typu stanowią punkt wyjścia dla nauk matematycznych stosowanych; i w tej mierze, w jakiej charakteryzują się odniesieniem egzystencjalnym, domagają się weryfikacji wykraczającej poza samo sprawdzenie ich wewnętrznej niesprzeczności.

Z tego względu, działy matematyki stosowanej w tej mierze, w jakiej posiadają charakter stosowany, nie są czysto dedukcyjne, chyba że jakoś utrzymuje się, że *a priori* gwarantowana jest oprócz wewnętrznej niesprzeczności definicji także ich prawdziwość.

Definicja matematyczna konwencjonalna nie posiada odniesienia egzystencjalnego. Prezentuje ona umysłowi, poprzez akt wyobraźni, zbiór rzeczy wraz z w pełni określonymi, wewnętrznie niesprzecznymi typami relacji. By [jednak] matematyka oparta na definicjach konwencjonalnych posiadała jakąś użyteczność, byty stwarzane przez te definicje muszą posiadać cechy noszące pewne znamiona podobieństwa do cech rzeczy [realnie] istniejących. Zatem ustalenie, na podstawie [samej] formy, w jakiej dana definicja matematyczna została wyrażona, czy jest ona definicją z odniesieniem egzystencjalnym, czy też definicją konwencjonalną, nie zawsze jest całkiem oczywiste. Jakkolwiek można zbudować definicję o wyraźnej formie czy to konwencjonalnej, czy egzystencjalnej, niemniej często nie daje to żadnych korzyści. W takim przypadku definicje i wynikające zeń zdania można interpretować, bądź jako odnoszące się do świata idei stworzonego przez konwencję, bądź jako odnoszące się w sposób dokładny lub przybliżony do świata [realnie] istniejących rzeczy. Odniesienie egzystencjalne pojawia się w definicji matematycznej wyłącznie w matematyce mieszanej; w matematyce czystej, definicja matematyczna musi być konwencjonalna[5].

Historycznie rzecz biorąc, aż do czasów niedawnych, matematyka ograniczała się do teorii liczb, teorii wielkości (*quantity*) (ściśle rozumianej) i teorii przestrzeni doświadczenia potocznego. Ograniczenie to było uzasadnione praktycznie: nie istniał żaden inny system rozumowania dedukcyjnego, który by spełniał naszą definicję matematyki. Przyjęcie w algebrze zwykłej wielkości złożonej (*complex quantity*), bytu w sposób oczywisty opartego na definicjach konwencjonalnych[6], dało początek bardziej ogólnym (*wider*) współczesnym naukom matematycznym. Uświadomienie sobie ogólniejszych (*wider*) pojęć dokonało się [jednak] z opóźnieniem z powodu zwyczaju matematyków, [swoją drogą] niezwykle pożytecznego i faktycznie niezbędnego dla ich własnych celów, rozciągania (*extending*) wszystkich nazw w celu stosowania ich do nowo pojawiających się idei. W ten sposób nazwa wielkości (*quantity*) została przeniesiona z *wielkości* ściśle rozumianej na uogólniony byt zwykłej algebry, stworzony przez definicję konwencjonalną, odnoszący się do wielkości (w ścisłym sensie) jedynie jako do szczególnego przypadku.

W swym współczesnym rozwoju algebra zwykła studiowana jest jako obszerny zespół (*body*) zdań, powiązanych wzajemnie rozumowaniem dedukcyjnym oraz oparty na definicjach konwencjonalnych będących uogólnieniami pojęć fundamentalnych. Tym samym powstaje stopniowo nauka, która dzięki swemu fundamentalnemu charakterowi dotyczy (*has relation*) każdego niemal zdarzenia, czy to zjawiskowego, czy też intelektualnego, jakie może się wydarzyć. Ale te same racje, które przemawiają za studiowaniem algebry zwykłej, stosują się [także] do badań nad algebrą uniwersalną, zważywszy, że można pokazać, iż nowo wymyślone algebry egzemplifikują poprzez swoją symbolikę, lub też reprezentują poprzez swoje interpretacje interesujące uogólnienia ważnych systemów idei, oraz stanowią użyteczne narzędzia badań. Takie algebry są naukami matematycznymi, które niekoniecznie zajmują się liczbami czy ilościami. Właśnie to śmiałe rozwinięcie (*extension*) poza tradycyjną dziedzinę czystej ilości (*quantity*) stanowi o ich szczególnej wartości [poznawczej]. Ideałem matematyki powininno być zbudowanie takiego rachunku, który

[5]Zob. Grassmann, *Ausdehnungslehre* z 1844, Einleitung.

[6]Whitehead ma tutaj zapewne na myśli np. liczby zespolone i kwaterniony.

ułatwiałby rozumowanie w odniesieniu do każdej dziedziny (*province*) myśli lub doświadczenia zewnętrznego; rachunku, w którym następstwo myśli lub zdarzeń może być ostatecznie ustalone i precyzyjnie wyrażone. W tej sytuacji wszelka poważna myśl nie będąca ani filozofią, ani rozumowaniem indukcyjnym, ani literaturą stanowiącą wytwór wyobraźni stanie się matematyką rozwijaną przy pomocy rachunku (*calculus*).

Celem niniejszej książki jest szczegółowe przedstawienie nowych algebr jako użytecznych narzędzi dedukcyjnego wyprowadznia zdań: a poprzez ukazanie właściwego im podporządkowania istotnym — naczelnym (*dominant*) ideom, przedstawienie ich jako symbolizmów będących reprezentacjami pojęć fundamentalnych (*as representative symbolisms of fundamental conceptions*). Zgodnie z tym drugim celem nie wahałem się skracać, a nawet opuszczać te koncepcje (*developments*) i zastosowania, które nie wiążą się z istotnymi (*dominant*) interpretacjami jakiejkolwiek algebry. Zatem raczej jedność idei niż wyczerpujący charakter, stanowi zasadniczy cel tej książki (*ideal*). Jestem bowiem przekonany, że względne zaniedbanie tego tematu w ostatnich czterdziestu latach jest częściowo spowodowane brakiem jedności idei w jego prezentacji.

Zaniedbanie (*neglect*) tego tematu jest również, jak sądzę, częściowo spowodowane innym defektem w jego prezentacji. Będę go nazywał (z braku lepszego określenia) brakiem niezależności. Brak ten towarzyszył pojęciowemu kształtowaniu się tego tematu (*with which it has been conceived*). Zaraz wyjaśnię, co mam na myśli.

Każda metoda badań tworzy własne [pole] zastosowania (*applications*), a co za tym idzie, geometria analityczna jest inną nauką niż geometria syntetyczna, a z kolei one obydwie różnią się od współczesnej geometrii rzutowej. Wprawdzie wiele zdań występujących w tych trzech naukach jest identycznych, podobnie zresztą jak ogólny przedmiot ich badania — przestrzeń, niemniej byłoby poważnym błędem, gdybyśmy rozwijając którąś z tych trzech nauk zwyczajnie przenieśli na jej grunt zbiór zdań z dwóch pozostałych w niezmienionej formie i starali się je udowodnić metodami tejże nauki. Niektóre z tych zdań udałoby się udowodnić, choć z wielkim trudem, niektóre jednak byłoby w ogóle ciężko wyrazić w języku technicznym, czy symbolice tej specyficznej nauki. Te same problemy dotyczą zawartych w niniejszej pracy zastosowań algebr. Algebra Grassmanna, czyli rachunek rozciągłości, jest zastosowana do geometrii opisowej, geometrii liniowej i geometrii metrycznej, zarówno euklidesowej jak i nie–euklidesowej. Jednakże nauki te, tak jak są rozwijane w niniejszej pracy, nie są tymi samymi naukami, rozwijanymi przy pomocy innych metod, jakkolwiek dotyczą tego samego ogólnego przedmiotu badań. Ich kombinacja w niniejszej pracy tworzy nową i oddzielną naukę, oddzielną w taki sposób w stosunku do innych nauk traktujących o tym samym ogólnym przedmiocie badań, jak geometria analityczna odmienna jest od czystej geometrii. Wydaje mi się, że ta oddzielność, czy też niezależność, zastosowania (*application*) każdej z nowych algebr była w niewystarczającym stopniu uświadomiona, co doprowadziło do zahamowania jej rozwoju. W stosowaniu symbolizmu starałem się być bardzo konserwatywny. Symbole udziwnione raczej zaciemniają niż rozjaśniają myśl. Z tego powodu nie odważyłem się burzyć jakiejkolwiek dobrze ustalonej notacji. Z drugiej jednak strony nie wahałem się wprowadzać nowych symboli, kiedy wymagało tego wyrażenie nowych idei.

Obecny tom podzielony jest na siedem ksiąg. W księdze I rozważane są ogólne zasady całego zagadnienia. Księga II poświęcona jest algebrze logiki symbolicznej; wyniki tej księgi nie są konieczne do zrozumienia pozostałych ksiąg. Księga III poświęcona jest ogólnym zasadom dodawania oraz teorii rozmaitości położeniowej[7], będącej uogólnionym pojęciem przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów, bez wprowadzonej idei odległości. Zrozumienie tej księgi jest istotne dla czytania dalszych ksiąg. Księga IV poświęcona jest zasadom rachunku rozciągłości. Księga V stosuje rachunek rozciągłości do teorii sił w trójwymiarowej rozmaitości położeniowej. Księga VI stosuje rachunek rozciągłości do geometrii nie–euklidesowej, uważanej, za Cayleyem, za najbardziej ogólną teorię odległości na rozmaitości położeniowej; zrozumienie tej księgi nie jest konieczne w dalszej lekturze pracy. Księga VII stosuje rachunek rozciągłości do zwykłej trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej...[8]

tłumaczył Zbigniew Liana

[7]Whitehead używa określenia *Positional manifold*. W czasach, gdy pisał on swoją pracę, rodziła się topologia, badająca najogólniejsze własności figur geometrycznych i przestrzeni. Sam pomysł takich badań sięgał jednak Leibniza, który określił je mianem *analysis situs* — badaniem miejsca, położenia. Taką samą nazwą posługiwał się również Riemann, twórca pojęcia rozmaitości oraz uważany obecnie za ojca topologii H. Poincaré. Nazwa *situs* wyjaśnia określenie Whiteheada: *positional*. Dzisiaj mówilibyśmy o rozmaitości topologicznej w sensie szerszym. Zob. M. Kordos, *dz. cyt.*, 251n.

[8]W dalszej części wstępu autor wyraża swoje intelektualne zobowiązania w odniesieniu do różnych matematyków.