ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XIX / 1996, s. 24–45*

Krzysztof WÓJTOWICZ

O NADUŻYWANIU TWIERDZENIA GÖDLA W SPORACH FILOZOFICZNYCH

Od czasu udowodnienia tzw. twierdzeń limitacyjnych w logice (twierdzenia Gödla i twierdzenia Skolema–Löwenheima) toczy się spór dotyczący ich filozoficznych implikacji. Dyskusja ta jest wielowątkowa: w przypadku twierdzenia Skolema–Löwenheima dotyczy naszych możliwości opisywania rzeczywistości[1]. W przypadku drugiego twierdzenia Gödla dotyczy w szczególności programu Hilberta[2]. Pierwsze twierdzenie Gödla stanowi inspirację dla rozważania szeregu problemów: od zagadnień związanych z problemem psychofizycznym (czy dokładniej: od tezy, że „umysł jest maszyną”), po kwestię ograniczoności naszego poznania. W niniejszym artykule dyskutowany jest jedynie ten ostatni problem.

Spotykany jest pogląd, że twierdzenie Gödla dowodzi istnienia zasadniczych barier poznawczych; że nigdy nie będziemy mogli uchwycić całej prawdy o świecie, i to z przyczyn zasadniczych, a nie jedynie praktycznych. Według niektórych twierdzenie Gödla ma dowodzić niemożności

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] Twierdzenia Skolema–Löwenheima mówią, że jeżeli teoria w języku pierwszego rzędu ma model nieskończony, to ma model dowolnej mocy większej lub równej mocy języka. Nie możemy zatem w sposób kategoryczny opisać „modelu zamierzonego”. W szczególności oznacza to, że teoria sformułowana w języku przeliczalnym na model przeliczalny. Odnosi się to także do teorii mnogości; zjawisko to nazywa się niekiedy „paradoksem Skolema”. Paradoks dotyczy tego, że teoria, która mówi o obiektach nieprzeliczalnych, sama ma model przeliczalny.

[2] Drugie twierdzenie Gödla mówi, że teorie w języku pierwszego rzędu „ nie są w stanie” udowodnić swojej własnej niesprzeczności. Dotyczy to w szczególności arytmetyki Peano (PA) i teorii mnogości Zermelo–Fraenckla (ZF). Niesprzeczność tych teorii nie jest dowodliwa za pomocą środków formalnych dostępnych „wewnątrz” teorii. Jak wiadomo, na mocy tego twierdzenia program Hilberta w oryginalnej postaci nie jest możliwy do przeprowadzenia, ale podaje się propozycje jego modyfikacji czy innego rozumienia: w tym sensie dyskusja na ten temat nie jest zamknięta, (por. [Murawski 1993], [Kossak 1991], [Simpson 1988]. [Detlefsen 1986] broni poglądu, że twierdzenia Godla nie implikują, wbrew powszechnemu przekonaniu, niemożności przeprowadzenia programu Hilberta).

udzielenia naukowej odpowiedzi na pytania o charakterze egzystencjalnym, czy metafizycznym. Tego typu sugestie znajdziemy np. w [Życiński 1985, 194–5]. Podobne poglądy reprezentują m.in. Jaki i Katsoff. Jaki twierdzi, że poszukiwanie przez fizyków „teorii wszystkiego" wynika po części stąd, że słabo znają oni problematykę związaną z twierdzeniem Gödla (por. [Życiński 1993, 68]). Według Katsoffa twierdzenie Gödla implikuje, że *nigdy nie będzie mogła istnieć zupełna i ostateczna teoria rzeczywistości, tzn. metafizyka. Nie prowadzi to do mistycyzmu, lecz do ewolucyjnej wizji rzeczywistości* (cytat za [Życiński 1993, 307]). Z pewnością warto zastanowić się nad zagadnieniem, do jakiego stopnia występowanie w matematyce zjawisk, o których mówią nam twierdzenia Gödla, ustanawia w naszej działalności poznawczej istotne ograniczenia, i czy rzeczywiście przytoczone poglądy są słuszne. Naturalne jest tutaj skoncentrowanie się na naukach w nierozerwalny sposób związanych z matematyką, a więc raczej na fizyce i astronomii niż np. psychologii (pomimo stosowania w tej nauce pewnych metod formalnych) czy historii. Zawęża to oczywiście dyskusję, nie obejmując „wszelkich możliwych teorii rzeczywistości".

Niniejszy artykuł koncentruje się wokół dwóch problemów:

A). Czy potrafimy w naukach przyrodniczych w tej chwili wskazać konkretne pytania, na które nie potrafimy odpowiedzieć właśnie z powodu występowania w matematyce niezależności? Czy możemy wskazać konkretne luki w naszej wiedzy przyrodniczej, których istnienie wynika właśnie z twierdzenia Gödla? Innymi słowy, czy twierdzenie Gödla ma jakieś `praktyczne` implikacje?

B). Czy, nawet jeśli w tej chwili nie potrafimy wskazać konkretnych przykładów oddziaływania twierdzenia Gödla, to muszą się one w sposób konieczny pojawić? Czy zasadne jest stosowanie twierdzenia Gödla do naszej wiedzy przyrodniczej? Innymi słowy, czy rzeczywiście twierdzenie Gödla implikuje istnienie zasadniczych barier poznawczych?

Twierdzenia Gödla odnoszą się do pewnych teorii sformułowanych w języku pierwszego rzędu. Przypomnijmy, nie wdając się w szczegóły, że pierwsze twierdzenie Gödla mówi, że rekurencyjnie aksjomatyzowalne systemy formalne wyrażone w dostatecznie bogatym języku są niezupełne. Oznacza to, że istnieją zdania w języku tych teorii, których nie da się na gruncie tych teorii ani udowodnić, ani obalić. Innymi słowy, jeśli T jest taką teorią, a ϕ zdaniem od niej niezależnym, to zarówno $T + \phi$ jak i $T + non - \phi$ są niesprzeczne.

Oryginalny dowód Gödla polegał, mówiąc nieformalnie, na zręcznym zakodowaniu zdań metajęzyka w języku (z wykorzystaniem teorii funkcji rekurencyjnych) i zastosowaniu paradoksu kłamcy[3]. Dowód ten był niekonstruktywny — dowodził on istnienia pewnego „abstrakcyjnego" zdania niezależnego. O zdaniu tym wiadomo było jedynie to, że mówi o sobie, że nie posiada dowodu, nie miało natomiast „konkretnej treści matematycznej". Oczywiście pojęcie „konkretnej treści matematycznej" jest nieco nieostre, ale można chyba zgodzić się z tezą, że np. hipoteza Fermata (albo twierdzenie, że 2+2=4) jest bardziej konkretna niż zdanie, które mówi jedynie, że nie posiada dowodu. Wydaje się, że w tej kwestii panuje wśród większości matematyków, a nawet wśród logików, zgoda (np. Drake określa zdanie Gödlowskie jako zdanie metamatematyczne, przeciwstawiając je konkretnym zdaniom matematycznym [Drake 1989, 23]). Jednak przez długi czas nie potrafiono wskazać przykładów zdań niezależnych o konkretnej treści matematycznej. Dopiero w latach 70–tych podany został (por. [Paris Harrington 1977]) przykład pierwszego niezależnego zdania o charakterze kombinatorycznym. Dotyczyło ono tzw. podziałowych własności zbiorów skończonych. W krótkim czasie takich zdań pojawiło się więcej; były to zarówno zdania o charakterze kombinatorycznym jak i teorioliczbowym, np. zdanie Goodsteina. (Czytelnik znajdzie przystępne omówienie tych zagadnień np. w: [Adamowicz Zbierski 1991], [Murawski 1987], [Murawski 1993], [Murawski 1994], [Wójtowicz 1996]).

O ile jednak w przypadku arytmetyki PA długo nie potrafiono podać konkretnych przykładów zdań, co do których zasadne byłoby przypuszczenie, że są niezależne, to w teorii mnogości sytuacja przedstawiała się inaczej. Wiadomo było (tak jak w przypadku arytmetyki), że zdania niezależne istnieją (na mocy twierdzenia Gödla), ale bardzo wcześnie znaleziono «podejrzynych o niezależność». Były nimi: pewnik wyboru i hipoteza *continuum*. Przypomnijmy, że pewnik wyboru mówi, iż dla dowolnej rodziny niepustych zbiorów parami rozłącznych istnieje selektor, tzn. zbiór, który z każdym zbiorem tej rodziny ma dokładnie jeden element wspólny[4]. Pewnik wyboru ma całkowicie niekonstruktywny charakter; stwierdza on istnienie pewnego zbioru nie mówiąc jednocześnie nic o jego własnościach (z wyjątkiem faktu, że z każdym zbiorem z naszej rodziny ma dokładnie jeden element wspólny) ani o sposobie konstrukcji. Dlatego od początku wzbudzał on wiele kontrowersji. Wśród krytyków pewnika wyboru (ze względu na jego niekonstruktywny charakter) zna-

[3]Zainteresowany czytelnik znajdzie dowód twierdzenia Gödla np. w [Adamowicz Zbierski 1991], [Barwise 1977], albo niemal w każdym standardowym podręczniku logiki.

[4]W równoważnym sformułowaniu pewnik wyboru mówi, że dla każdej rodziny niepustych zbiorów S istnieje funkcja $f\colon S \to \cup S$ taka, że $f(s) \in s$ dla każdego $s \in S$.

leźli się np. Borel, Baire i Lebesgue. Ciekawy jest fakt, że matematycy ci mimo to sami nieświadomie używali tego aksjomatu przy dowodzeniu twierdzeń. Zwolennikiem przyjęcia pewnika wyboru (jeszcze w przedaksjomatycznej fazie teorii mnogości) był Zermelo, powołując się na jego podstawowe dla matematyki implikacje. Wokół pewnika wyboru toczyła się dyskusja dotycząca dwóch zagadnień, a mianowicie jego niesprzeczności z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości Zermelo–Fraenckla oraz jego „wiarygodności”[5] (por. [Maddy 1988]). Niesprzeczność pewnika wyboru udowodnił Gödel w 1940 roku konstruując model dla teorii mnogości z pewnikiem wyboru (ZFC). Nie rozstrzygało to jednak dyskusji na temat tego, czy pewnik wyboru powinien być przyjęty, i jeżeli tak, to czy w najogólniejszej, czy może osłabionej postaci, np. w postaci tzw. przeliczalnego pewnika wyboru, który odnosi się jedynie do przeliczalnych rodzin zbiorów. Wśród sformułowań równoważnych pewnikowi wyboru jako najbardziej znane (i najczęściej pojawiające się w zastosowaniach) należy chyba wyróżnić twierdzenie Zermelo o dobrym uporządkowaniu i lemat Kuratowskiego–Zorna. Pierwsze twierdzenie mówi, że każdy zbiór można dobrze uporządkować, tzn. ustawić w ciąg, być może pozaskończony. Może być to nieco zaskakujące w stosunku np. do zbioru liczb rzeczywistych, który na ogół wyobrażamy sobie jako „nieskończenie cienką, nieskończenie długą i `ciągłą` kreskę” i trudno wyobrazić sobie, jak liczby rzeczywiste mają być ustawione w dyskretny ciąg. Za pomocą pewnika wyboru można wykazać istnienie zbioru niemierzalnego na prostej, jak również udowodnić twierdzenie Banacha–Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli. Nie wnikając zbyt głęboko w szczegóły techniczne, twierdzenie to mówi, że kulę można rozłożyć na skończoną ilość kawałków a następnie złożyć z nich dwie kule, z których każda jest przystająca do kuli wyjściowej. Oczywiście rozkład ten nie przypomina w niczym cięcia nożem; figury powstające z rozkładu kuli są niemierzalne, czyli w szczególności „bardzo dziwne”[6]. Twierdzenie to stoi w jawnej sprzeczności z naszymi doświadczeniami z życia codziennego. (Przeprowadzenie tego typu operacji rozwiązałoby raz na zawsze problemy energetyczne czy żywieniowe ludzkości. Tu niestety teoria rozmija się z praktyką).

Pewnik wyboru, pomimo iż ma szereg zaskakujących konsekwencji (jak twierdzenie Banacha–Tarskiego) jest bardzo ważny w matematyce współczesnej. Stosowany jest najczęściej w postaci lematu

[5]Dokładną historię dyskusji, jaka toczyła się wokół pewnika wyboru, czytelnik znajdzie w monografii [Moore 1982].

[6]Sformułowanie i dowód twierdzenia Banacha–Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli można znaleźć np. w [Jech 1973], [Jech 1977].

Kuratowskiego–Zorna, który mówi, że zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy łańcuch ma ograniczenie górne, posiada element maksymalny[7]. Lemat ten stosowany jest powszechnie we wszystkich działach matematyki: od logiki (twierdzenie o pełności), poprzez algebrę liniową (twierdzenie, że każda przestrzeń liniowa ma bazę) do analizy funkcjonalnej (twierdzenie (Hahna–Banacha). Nie ma sensu mnożyć tu przykładów zastosowań lematu Kuratowskiego–Zorna; obejmują one bardzo obszerny fragment matematyki, w tym również matematyki stosowanej. Matematyka bez pewnika wyboru byłaby uboższa, nie można by nawet udowodnić oczywistego, jak się wydaje, twierdzenia, że suma przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym[8]. Jednak, jak udowodnił Cohen w 1963 roku, pewnik wyboru jest niezależny od teorii mnogości. To, że jest niesprzeczny, wiadomo było od czasu dowodu Gödla, natomiast Cohen skonstruował model dla teorii mnogości z negacją pewnika wyboru. Oznacza to, że tak naprawdę o przyjęciu pewnika wyboru decydują względy pragmatyczno–estetyczne.

Drugim ważnym przykładem zdania niezależnego w teorii mnogości jest hipoteza *continuum*, sformułowana już przez Cantora. Przypomnijmy dla porządku, że w arytmetyce liczb kardynalnych moc zbioru liczb naturalnych oznaczamy przez ω_0. Jest to najmniejsza nieskończona liczba kardynalna. Kolejne liczby kardynalne oznaczamy przez ω_1, ω_2 itd. Moc zbioru liczb rzeczywistych oznaczamy przez c. Wiadomo, że zbiór liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem podzbiorów zbioru liczb naturalnych (zbiorem potęgowym zbioru liczb naturalnych), którego moc jest równa 2^{ω_0}. Nie wiemy jednak, w którym miejscu ciągu liczb kardynalnych znajduje się *continuum*. Hipoteza *continuum* (oznaczana standardowo przez CH, od angielskiego *continuum hypothesis*) mówi, że $c = \omega_1$, tzn., że *continuum* jest następną po ω_0 liczbą kardynalną. Oznacza to w szczególności, że podzbiory nieskończone zbioru liczb rzeczywistych są albo przeliczalne, albo mają moc *continuum*. Nie ma zbiorów o mocy pośredniej. Na pierwszy rzut oka przyjęcie takiej hipotezy wydaje się być naturalne, gdyż trudno byłoby wyobrazić sobie podzbiór prostej rzeczywistej o mocy pośredniej. Niesprzeczność hipotezy *continuum* z aksjomatami ZFC udowodnił w 1940 r. Gödel. Pytanie o niezależ-

[7]Sformułowanie i dowód równoważności z pewnikiem wyboru lematu Kuratowskiego–Zorna znaleźć można w [Jech 1973], albo w niemal każdym podręczniku teorii mnogości.

[8]W matematyce bez pewnika wyboru „dzieją się dziwne rzeczy”. Nie da się udowodnić twierdzenia, że iloczyn kartezjański zbiorów niepustych jest zbiorem niepustym, za to istnieje taki nieskończony zbiór liczb rzeczywistych, który nie ma podzbioru przeliczalnego. Opis tych zjawisk czytelnik znajdzie np. w [Jech 1973].

ność pozostawało nierozstrzygnięte aż do roku 1963, kiedy Cohen udowodnił niesprzeczność negacji hipotezy *continuum* z ZFC, konstruując metodą tzw. forcingu (wymuszania) odpowiedni model dla ZFC+non–CH. Znowu okazało się, że nie możemy oczekiwać odpowiedzi na pytanie o status CH w ramach sformalizowanej teorii mnogości ZFC i musimy odwoływać się do naszych intuicji i kryteriów pozasystemowych. Niektórzy (tak jak Martin w [Martin 1976, 81]), podkreślają, że nie jest jasne, czy problem *continuum* został w ogóle rozwiązany i czy w ogóle jest to tak naprawdę problem matematyczny. Gödel w [Gödel 1947/64] twierdzi, że pytanie o prawdziwą wartość *continuum* jest pytaniem dotyczącym rzeczywistości (co stanowi wyraz jego platonistycznych poglądów), zaś jego niezależność od konkretnej aksjomatyki pokazuje jedynie słabość tej aksjomatyki. Sam Gödel do końca życia interesował się tym zagadnieniem i poszukiwał aksjomatów mogących przynieść odpowiedź na pytanie o prawdziwą wartość*continuum* (por. [Gödel 1970]). Dales i Woodin (specjaliści z zakresu teorii mnogości) wyrażają nadzieję, że być może nasze rozumienie świata zbiorów osiągnie stan, w którym możliwe będzie znalezienie naturalnych aksjomatów, umożliwiających osiągnięcie zgody co do „najbardziej rozsądnej wartości *continuum*" ([Dales Woodin 1987, 90–91]).

O ile jednak w przypadku pewnika wyboru można śmiało przyjąć kryterium pragmatyczne — matematyka bez pewnika wyboru jest mniej ciekawa, uboższa i, być może, mniej pomocna w poznawaniu świata (mam tu na myśli aparaturę matematyczną używaną w naukach przyrodniczych), o tyle w przypadku CH o wiele trudniej jest podać przekonujące argumenty tego typu. Odrzucenie hipotezy *continuum* nie spowoduje zubożenia matematyki w takim sensie, w jakim spowodowałoby to odrzucenie pewnika wyboru. Inaczej niż w przypadku pewnika wyboru brak jest przykładów istotnych twierdzeń w matematyce, których dowód opierałby się na hipotezie *continuum.* Trudniej też, niż w przypadku pewnika wyboru, odwoływać się do intuicji — o ile bowiem pewnik wyboru w jakimś sensie uogólnia nasze oczywiste intuicje z życia codziennego, o tyle CH nie ma tego charakteru. Można podać pozornie oczywiste argumenty na rzecz przyjęcia hipotezy *continuum* jak i na rzecz jej odrzucenia. Odrzucając CH „godzimy" się na istnienie nieprzeliczalnych podzbiorów prostej o mocy mniejszej niż *continuum*, co trudno jest sobie wyobrazić. Jednak przyjmując CH musimy zaakceptować fakt, że liczby rzeczywiste można ustawić w taki sposób, że każdy właściwy odcinek początkowy tego ciągu jest przeliczalny, czy też inaczej, że liczb rzeczywistych jest tyle samo, ile jest przeliczalnych liczb porządkowych. Oba te fakty są do pewnego stopnia sprzeczne z naszymi intuicjami, przy czym brak jest wśród matematyków zgody co do ich „stopnia sprzeczności z intuicjami”. Moore pisze o rozbieżnościach w ocenie na temat „naturalności” pewnych aksjomatów pomiędzy Gödlem a Cohenem czy Martinem — wybitnymi specjalistami w zakresie teorii mnogości ([Moore 1990, 165])[9].

Hipoteza *continuum* i pewnik wyboru nie są oczywiście jedynymi ważnymi niezależnymi zdaniami w teorii mnogości. Od czasu stworzenia przez Cohena metody forcingu udowodniono niezależność wielu zdań, głównie dotyczących kombinatoryki nieskończonej czy arytmetyki liczb kardynalnych (por. np. [Kunen 1980]). Dowodzeniem niezależności pewnych zdań i relatywnej niesprzeczności systemów aksjomatycznych zajmuje się obszerny dział teorii mnogości. Jednak przykłady zdań niezależnych (od ZFC) można znaleźć także w innych działach matematyki, na przykład w teorii przestrzeni Hilberta, szeroko stosowanej, chociażby w mechanice kwantowej czy np. w teorii aproksymacji[10]. Znany jest przykład „konkretnego” zdania matematycznego dotyczącego norm określonych na pewnych algebrach Banacha (por. [Dales Woodin 1987]). Friedman znalazł zdania dotyczące funkcji borelowskich określonych na kostce Hilberta o wartościach w odcinku [0,1], które są niezależne od ZFC. Co więcej, zdania te nie dadzą się nawet rozstrzygnąć poprzez przyjęcie aksjomatu konstruowalności, wymagając silnych założeń dotyczących liczb Mahlo[11] (por. [Friedman 1981]). Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku pewnych zdań kombinatorycznych dotyczących obiektów skończonych (por. [Friedman 1986]). One także wymagają przyjęcia bardzo silnych założeń teoriomnogościowych dotyczących dużych liczb kardynalnych. W naszych rozważaniach dotyczących filozoficznych implikacji istnienia zdań niezależnych musimy brać te wyniki pod uwagę, zwłaszcza w kontekście sformułowanego na początku artykułu zagadnienia **A**. W szczególności musimy zastanowić się nad miejscem tych wyników w matematyce stosowanej.

[9] Dyskusję na temat argumentów za i przeciw przyjęciu CH (jak i AC) można znaleźć w [Maddy 1988]. Freiling w [1986] proponuje „naturalne” aksjomaty, z których wynika negacja CH i AC.

[10] Przykładem takiego zdania może być: „Ideał operatorów zwartych na przestrzeni Hilberta jest sumą dwóch mniejszych ideałów właściwych” (por. [Roitman 1992]). Jest to oczywiście zdanie odnoszące się do bardzo konkretnych obiektów matematycznych, takich jak przestrzenie Hilberta i działające na tych przestrzeniach zwarte operatory liniowe.

[11] Liczby Mahlo to tzw. „duże liczby kardynalne”, ktorych istnienia nie da się udowodnić w teorii mnogości ZFC. Mówiąc w sposób nieformalny, są one „większe, niż jakikolwiek zbiór, którego istnienie można udowodnić w ZFC”.

Widzimy zatem, że w matematyce występują zdania niezależne. Istnienie tych zdań zdaje się wzmacniać tezę, że twierdzenia Gödla ustanawiają istotne bariery poznawcze naszej działalności. Jednak nie jest oczywiste, że rzeczywiście zjawisko niezależności w matematyce odgrywa taką rolę. Zastanowimy się najpierw nad problemem A, tzn. nad zagadnieniem, na ile niezależności są obecne w matematyce stosowanej i fizyce.

(1). Zwróćmy uwagę na fakt, że „niezależność niezależności nierówna". Twierdzenie Ramsey'a nie jest dowodliwe w PA, co jest faktem interesującym matematycznie, jak i filozoficznie (por. [Wójtowicz 1996]). Wiemy jednak, że twierdzenie to jest prawdziwe w odniesieniu do liczb naturalnych — umiemy to udowodnić w teorii mnogości. Podobnie jest z wieloma innymi zdaniami niezależnymi od PA. Należy tu zwrócić uwagę na pewnien fakt. Oczywiste jest, że twierdzenie Ramsey'a umiemy udowodnić w jakiejś teorii silniejszej, na przykład w teorii „PA + twierdzenie Ramsey'a", podobnie jak każde zdanie ϕ niezależne od dowolnej teorii T jest dowodliwe (w trywialny sposób) w teorii „$T + \phi$". Istotne jest jednak to, że możemy je udowodnić w jednej, naturalnej z punktu widzenia matematyki, teorii, jaką jest teoria mnogości ZFC[12].

Obecnie dobrze już wiemy, skąd „bierze się" niedowodliwość pewnych zdań niezależnych od PA. Zjawiska te nie są już owiane aurą tajemniczości i niezwykłości jak u swoich prapoczątków, stając się zwykłymi wynikami technicznymi. Mówią one, w pewnym uproszczeniu, tyle: zdanie ϕ jest prawdziwe w odniesieniu do „prawdziwych", tj. standardowych liczb naturalnych, jednak PA jest teorią zbyt słabą, żeby to udowodnić. Nie ma w tym nic tajemniczego — jeżeli w rachunku zdań osłabilibyśmy regułę wnioskowania *modus ponens* tylko np. do formuł o długości mniejszej niż 10, to wielu tautologii (czyli zdań prawdziwych) nie umielibyśmy udowodnić. Zdania niezależne od PA nie należą zatem do obszaru niewiedzy — znamy odpowiedzi[13] na nie dzięki odwołaniu się do teorii silniejszej, jaką jest teoria mnogości (czyli „cała matematyka"); znamy także ich status metamatematyczny, tzn. ich niezależność od PA (a czasami nawet ich „stopień niezależności od PA", co oznacza, że wiemy, jak należy wzmocnić PA, aby je udowodnić). Niekiedy musimy się odwołać do bardzo zaawansowanych technik matematycznych dla rozstrzygnięcia

[12] Oczywiście nie chodzi o to, że każde zdanie niezależne od PA można udowodnić w ZFC, ale o to, że tak jest w przypadku zdań prawdziwych w odniesieniu do standardowego modelu dla PA, czyli liczb naturalnych.

[13] Mówiąc ściśle: wiemy, czy są one prawdziwe w odniesieniu do standardowych liczb naturalnych, gdyż oczywiście niektóre zdania niezależne od PA są w standardowym modelu dla PA (czyli w „prawdziwych liczbach naturalnych") prawdziwe, inne zaś fałszywe.

danego problemu teorioliczbowego, jak to ma miejsce w przypadku niedawno rozwiązanego problemu Fermata, w dowodzie którego wykorzystane są bardzo zaawansowane techniki geometrii algebraicznej. Jednak zawsze w przypadku tego typu zdań niezależnych możemy odwołać się do naturalnej „teorii–wyroczni", przy czym może nią być ZFC, a czasami wystarczy nawet teoria słabsza.

Inna sytuacja jest w przypadku zdań niezależnych od ZFC. Tutaj niezależność jest czymś „absolutnym". Nie możemy dla rozstrzygnięcia zdań niezależnych po prostu odwołać się do teorii silniejszej — każdy wybór takiej „teorii–wyroczni" byłby wyborem czysto arbitralnym, inaczej niż w przypadku PA. Przypominałby on sytuację, w której dla rozstrzygnięcia, czy twierdzenie Ramsey'a jest prawdziwe, po prostu je zakładamy. Wybór taki nie wynikałby z odwołania się do praktyki matematycznej (takim odwołaniem jest zastosowanie ZFC dla rozstrzygnięcia pytań teorioliczbowych, bo ZFC jest powszechnie akceptowane przez matematyków), ale z odwołania się do kryteriów estetycznych, do intuicji czy jeszcze innych kryteriów pozasystemowych. Wynika to z tego, że o ile zgadzamy się co do tego, czym są standardowe liczby naturalne (możemy je zdefiniować w ZFC, albo w arytmetyce drugiego rzędu), to nie ma zgody co do tego, jak „naprawdę" wygląda uniwersum zbiorów. Możemy zatem uznać za zasadną hipotezę, że o ile niezależności od PA i innych podobnych słabych systemów aksjomatycznych nie stanowią bariery poznawczej, to sytuacja w przypadku zdań niezależnych od ZFC jest inna — tu niezależność jest czymś zdecydowanie bardziej istotnym, wręcz „absolutnym". Ewentualne zjawiska „bariery poznawczej" mogłyby zatem wystąpić w wyniku istnienia zdań niezależnych od teorii mnogości. Wcześniej przytoczyliśmy kilka przykładów zdań z „prawdziwej matematyki", które są niezależne. Niemniej jednak należy zauważyć, że takich zdań niezależnych nie znamy zbyt dużo. Większość przykładów to zdania *stricte* teoriomnogościowe, albo z topologii teoriomnogościowej, natomiast nie potrafimy podać zbyt wiele tego typu przykładów z teorii aproksymacji, procesów stochastycznych czy geometrii różniczkowej, czyli „konkretnej matematyki". To sugeruje, że niezależności koncentrują się w samej teorii mnogości — poza nią nie mają już tak silnego oddziaływania. Można wprawdzie podać przykłady zdań np. z teorii grup, które zależą od CH, ale ilość ich jest znikoma. Problem niezależności zdań matematyki stosowanej omawiamy w następnym akapicie.

(2). Zastanówmy się nad faktycznym występowaniem niezależności w matematyce stosowanej. Zauważyliśmy już, że większość (choć nie wszystkie!) zdań niezależnych od ZFC dotyczy zagadnień *stricte* teoriomnogościowych — dotyczą one np. istnienia dużych liczb kardynalnych, arytmetyki liczb kardynalnych, możliwych wartości *continuum,* etc. (por. np. [Kunen 1980]). Można, nieco nieformalnie, powiedzieć, że dotyczą one bytów „wysoce abstrakcyjnych", nie odnosząc się do konkretnych obiektów jak np. przestrzeń C[0,1] albo rozmaitości różniczkowe 4–wymiarowe[14]. Z drugiej strony mamy wyniki dotyczące ideałów operatorów zwartych czy norm na algebrach Banacha, albo wyniki Friedmana i da Costy. Nie jest jednak jasne, na ile te zdania mogą rzeczywiście odegrać rolę przy opisie świata fizycznego. Można bowiem bronić tezy, że pewne obiekty konstruowane w wymyślnych modelach dla teorii mnogości pozbawione są „sensu fizycznego", i są pewnymi sztucznymi tworami, zaś modele dla teorii mnogości, w których pewne zdania niezależne od ZFC nie są spełnione, nie są „prawdziwymi modelami dla teorii zbiorów". Ich konstrukcja jest możliwa ze względu na słabość ZFC, podobnie jak możemy skonstruować model dla PA, w którym fałszywe jest twierdzenie Ramsey'a, pomimo iż w standardowych liczbach naturalnych jest ono prawdziwe. (Możemy nawet skonstruować model dla PA, w którym prawdziwe jest zdanie „PA jest teorią sprzeczną"). Powraca tu problem mocy wyrażeniowej języka pierwszego rzędu. Przytoczmy tu uwagę Scotta ([Scott 1971]), w której mówi on o poszukiwaniu „absolutnego" (czyli scharakteryzowanego w sposób kategoryczny) uniwersum zbiorów. Istnienie tak wielu modeli dla ZFC wynika według niego ze słabości logiki pierwszego rzędu. Być może, gdyby rzeczywiście udało się znaleźć teorię opisującą absolutne uniwersum, to nie byłoby w nim różnych „dziwnych „ obiektów, które mogą zostać skonstruowane w niektórych modelach dla ZFC. Do dyskusji na temat logiki pierwszego rzędu powrócimy w punkcie 4.

Z samego faktu, że w tej chwili brak zastosowań dla tego typu teorii czy twierdzeń, nie wynika oczywiście, że nie może ich być. Rozważania prowadzone w niniejszym paragrafie dotyczą jednak wyłącznie problemu A i stanowią argument na rzecz odrzucenia tezy o istnieniu w tej chwili praktycznych implikacji twierdzenia Gödla.

(3). Z poruszanym w poprzednim akapicie problemem znaczenia zdań niezależnych dla fizyki wiąże się problem złożoności czy też „abstrakcyjności" technik matematyki stosowanej. „Abstrakcyjność" rozumiana jest tu nie w sensie „trudność i komplikacja" — nikt nie neguje faktu, że np. teoria procesów stochastycznych, tak ważna w zastosowa-

[14]Przestrzeń C[0,1] to przestrzeń funkcji ciągłych określonych na odcinku [0,1], o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych. Rozmaitości to przestrzenie topologiczne lokalnie „podobne" do naszej przestrzeni euklidesowej.

niach, jest trudna i posługuje się bardzo zaawansowanymi technikami. Chodzi tutaj o nieco inne rozumienie tego pojęcia — jako o siłę aksjomatów teoriomnogościowych niezbędnych dla rozwijania danej teorii. (W jakimś sensie chodzi tu o problem, „jak blisko” abstrakcyjnej teorii mnogości musimy się znaleźć, aby uprawiać matematykę). Już Hilbert i Bernays w [1934] zauważyli, że dla rozwijania i uprawiania matematyki klasycznej nie musimy odwoływać się do pełnej teorii mnogości — wystarczy tu arytmetyka drugiego rzędu Z_2. (Gwoli ścisłości należy dodać, że trudno jest dokładnie sprecyzować pojęcie „matematyka klasyczna”, dlatego stwierdzenie Hilberta i Bernaysa dotyczyło „znacznych fragmentów matematyki klasycznej”, w szczególności analizy). Oczywiście matematyka klasyczna w czasach Hilberta jest czym innym niż matematyka występująca obecnie w zastosowaniach. Jednak prawdą jest, że znaczne fragmenty matematyki „zwykłej”[15] można rozwijać w podsystemach Z_2, a więc bez odwoływania się do pełnego ZFC. Badaniem tych zagadnień zajmuje się tzw. „matematyka odwrotna”, zainicjowana przez Friedmana w roku 1974. (Czytelnika odsyłamy do prac [Murawski 1993], [Simpson 1984], [Simpson 1987], [Simpson 1988], [Wójtowicz 199?]). Jak na razie, program matematyki odwrotnej nie pozwolił na zbyt daleko idącą klasyfikację twierdzeń matematyki zwykłej, ale wiemy już, że w pewnych podsystemach Z_2 można sformułować i udowodnić szereg ważnych w zastosowaniach twierdzeń, jak twierdzenie Arzeli–Ascoliego, twierdzenie Cauchy'ego–Peano o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego, twierdzenie Hahna–Banacha, twierdzenie Baire'a i wiele innych. Może to sugerować, że dla uprawiania matematyki ważnej dla zastosowań możemy ograniczyć się do stosunkowo słabych teorii, nie korzystając z pełnej mocy ZFC. Dzięki temu zjawiska niezależności dotyczące ZFC stracą na znaczeniu; dla rozwiązania pojawiających się ewentualnie w naszych słabych teoriach niezależności będziemy mogli odwołać się do „teorii–wyroczni”, jaką będzie teoria mnogości. Schemat byłby

[15]Pojawia się pytanie, co to znaczy „zwykła matematyka”. Simpson, jeden ze współtwórców programu matematyki odwrotnej, odpowiada na to pytanie w sposób następujący: „mówiąc ogólnie, przez zwykłą matematykę rozumiemy będącą w głównym nurcie badań matematycznych matematykę nie–teoriomnogościową, tj. matematykę, z jaką mieliśmy do czynienia, zanim zabrali się za jej uprawianie specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości. (Lub raczej: matematykę taką, jaką byłaby, gdyby nie zabrali się do niej specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości.) Zwykła matematyka obejmuje zatem geometrię, teorię liczb, rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, analizę rzeczywistą i zespoloną, przeliczalną algebrę, topologię zupełnych ośrodkowych przestrzeni metrycznych, logikę matematyczną i teorię obliczeń. Nie obejmuje ona abstrakcyjnej teorii mnogości, abstrakcyjnej analizy funkcjonalnej, topologii ogólnej i algebry nieprzeliczalnej”. [Simpson 1984, 783].

zatem taki: dla zastosowań ważne są teorie T, T', T" etc. Jeżeli nawet występują w nich niezależności, to odwołujemy się do „teorii wyroczni", jaką jest np. ZFC. Niezależności od ZFC nas już nie interesują, o ile nie mają odbicia w teoriach T, T', T" etc. Podobnie jak rozważania prowadzone w poprzednim akapicie te argumenty nie są konkluzywne, gdyż oczywiście nie wykluczają potencjalnej możliwości pojawienia się zdań niezależnych od teorii mnogości w fizyce[16]. Stanowią jedynie argument na rzecz tezy, że bariera poznawcza wynikająca z istnienia zdań niezależnych (a więc z twierdzenia Gödla) jak na razie nie dała o sobie znać.

W następnych paragrafach koncentrować będziemy się wokół problemu B.

(4). Za podstawową dla matematyki teorię uważa się powszechnie teorię mnogości ZFC. Cała matematyka może być zrekonstruowana w języku teorii mnogości, i panuje zgoda co do tego, że w prowadzonych badaniach nie sięga się po założenia wykraczające poza aksjomaty ZFC (jeżeli takie założenia są używane, to zawsze jest to wyraźnie zaznaczone; wyniki takie mają raczej charakter metamatematyczny niż czysto matematyczny, choć oczywiście granica jest płynna). W tym sensie teoria mnogości ZFC jest naturalną „teorią–wyrocznią", do której odwołują się (prawie) wszystkie teorie matematyczne i w której te teorie można zrekonstruować. Jednak nie jest oczywiste, że matematyka musi być uprawiana i formalizowana w języku logiki pierwszego rzędu. Przypomnijmy, że twierdzenia Gödla odnoszą się do systemów sformułowanych w takim właśnie języku; nie dotyczą natomiast logiki drugiego rzędu. Dyskusja na temat adekwatności logiki pierwszego rzędu do formalizowania matematyki nie jest nowa — prowadzili ją już Skolem, Zermelo i sam Gödel. W literaturze współczesnej zagadnienie to dyskutowane jest np. w [Barwise 1985], [Shapiro 1985], [Shapiro 1991], [Tharp 1975]. Dwaj pierwsi autorzy wypowiadają się przeciwko popularnej co najmniej od czasów Quine'a (a mającej niewątpliwy związek ze sformułowanym przez niego kryterium istnienia) „tezie o logice pierwszego rzędu", w myśl której ta właśnie logika jest adekwatnym narzędziem dla formalizacji rozumowań matematycznych. Wskazują na bogactwo silniejszych logik i na ich naturalność z punktu widzenia praktyki matematycznej. Shapiro podaje kilka argumentów na rzecz tezy, że właściwą logiką dla prowadzenia rozumowań matematycznych jest logika II–go rzędu[17]. Barwise twierdzi

[16] Pewne wyniki w tym kierunku osiągnął np. da Costa z grupą współpracowników (por. [da Costa Doria 1992]).

[17] Wśród argumentów przeciwko „tezie o logice pierwszego rzędu" Shapiro wymienia nieadekwatność takiej logiki dla formalizowania dyscyplin, gdzie mamy do czynienia z 'modelem zamierzonym'. Wynika to z niemożliwości kategorycznego scharaktery-

wręcz, że w świetle osiągnięć matematyki i logiki, zwłaszcza tzw. „abstrakcyjnej teorii modeli” *„nie ma powrotu do poglądu, że logika to logika pierwszego rzędu”* ([Barwise 1985, 23])[18]. Według Drake'a, matematyka to w gruncie rzeczy to samo, co logika drugiego rzędu, jednak, aby ją poznawać, badamy jej przybliżenia w teoriach pierwszego rzędu ([Drake 1989, 12]). Przypomnijmy jeszcze raz w tym kontekście uwagę Scotta dotyczącą absolutnego uniwersum i niemożności opisania go w logice pierwszego rzędu. Barwise twierdzi, że jeśli myślimy o logice jak „matematyk z ulicy”, to kryterium doboru logiki jest możliwość adekwatnego opisu. „Logiką danego pojęcia” jest logika najlepiej je opisująca (w idealnym przypadku — opisująca je kategorycznie). Jeżeli w „logice danego pojęcia” nie ma zbioru reguł generujących zdania prawdziwe, oznacza to, że pojęcie to jest zbyt złożone, aby można było na jego temat prowadzić rozumowania w stylu, do jakiego jesteśmy przyzwyczajeni ([Barwise 1985]). Jeżeli zatem interesuje nas semantyczna charakteryzacja pewnych zjawisk, to logika drugiego rzędu jest bardziej adekwatna, jako że ma zdecydowanie większe możliwości wyrażeniowe niż logika pierwszego rzędu (np. można w niej w sposób kategoryczny scharakteryzować liczby naturalne albo rzeczywiste). Z drugiej strony, jeżeli przyjmiemy logikę drugiego rzędu za podstawową, to musimy zaakceptować fakt, że istnieją prawdy logiczne, których nie będziemy w stanie udowodnić w żadnym sensownym systemie dowodzenia. Jeżeli zatem uznamy, że logika powinna zajmować się dowodami i ich kodyfikacją, to logika drugiego rzędu nie może być tak naprawdę uznana za „prawomocną” logikę. Dyskusja ta nie jest rozstrzygnięta, widzimy jednak, że przyjęcie „tezy o logice pierwszego rzędu” (które jest warunkiem koniecznym bezpośredniego zastosowania twierdzenia Gödla do wywnioskowania tezy o zasadniczej ograniczoności naszego poznania) nie jest wcale oczywiste.

(5). Zauważmy najpierw, że jeżeli jakaś hipoteza fizyczna nie jest rozstrzygalna w dostępnym nam formalizmie matematycznym (na przykład, choć jest to wysoce nieprawdopodobne, istnienie jakiejś cząstki okazałoby się być równoważne CH), ale jest rozstrzygalna na drodze doświadczalnej, to nie możemy mówić o tym, że twierdzenie Gödla spowodowało istnienie jakiejkolwiek bariery poznawczej. Podobnie, jeżeli jakiś wniosek z danej teorii matematycznej jest sprzeczny z doświadczeniem, oznacza to, że teoria ta nie stanowi adekwatnego narzędzia dla opisu rzeczywistości. (Na przykład arytmetyka PA jest dobrym narzędziem

zowania opisywanych struktur i niemożliwości zdefiniowania ważnych pojęć, jak np. skończoność.

[18]Tzw. 'abstrakcyjnej teorii modeli' i innym niż logika pierwszego rzędu logikom poświęcona jest monografia [Barwise Feferman 1985].

dla opisywania dodawania do siebie koszy z jabłkami, natomiast teoria ciała Z_p[19] nie jest, bo przecież jabłka nie znikają po osiągnięciu pewnej liczby). W takiej sytuacji należy tę teorię odrzucić, bądź zmodyfikować (osłabić, odrzucić pewne aksjomaty, przyjąć inne etc.). Zauważmy, że zawsze wybór konkretnej teorii matematycznej, służącej nam jako instrumentarium dla naszej teorii rzeczywistości jest do pewnego stopnia arbitralny. Może się zdarzyć, że na jakieś pytanie nie umiemy odpowiedzieć na drodze czysto dedukcyjnych rozważań, gdyż jest ono niezależne od używanej przez nas teorii matematycznej. Jednak łatwo wskażemy szereg teorii silniejszych, w których to konkretne pytanie jest już rozstrzygalne. W skrajnym wypadku moglibyśmy po prostu przyjąć pewną ogólną dyrektywę postaci: „jeśli pojawi się jakieś zdanie niezależne nierozstrzygalne na drodze doświadczenia, to odpowiedz TAK i dołącz to zdanie do swojej teorii. Uzyskana w ten sposób teoria świata będzie na pewno niesprzeczna z doświadczeniem". Trudno jednak uznać to za rozwiązanie problemu i za rzetelną zasadę metodologiczną. Dlaczego jednak przyjęliśmy słabą teorię, w której szereg pytań jest nierozstrzygalnych?

Pojawia się tu zatem problem źródeł i uzasadnienia naszej wiedzy matematycznej. Używamy ZFC, a nie ZFC+CH, albo ZFC+V=L[20], choć przecież można byłoby tak zrobić. Musimy zatem zdać sprawę z tego stanu rzeczy. Dlaczego nie można po prostu przyjąć jakiejś bardzo silnej teorii i w niej uprawiać matematykę? Czy fakt, że matematyka ma taką a nie inną postać, jest jedynie przypadkiem historycznym? Być może, gdyby „ojcowie założyciele" współczesnej matematyki mieli inne intuicje, albo pracowali nad innymi zagadnieniami, to obecnie za oczywisty uznalibyśmy aksjomat konstruowalności, zaś na tych, którzy podważają zasadność uznania V=L za prawomocny aksjomat teorii mnogości, patrzylibyśmy zapewne jak na matematyków ze szkoły intuicjonistycznej — to co robią jest ciekawe, ale „prawdziwa" matematyka jest inna (por. dyskusję na temat aksjomatu konstruowalności w [Maddy 1993]). Zwróćmy uwagę na fakt, że stan obecny byłby także oceniony jako wysoce przypadkowy i pozbawiony uzasadnienia przez kogoś, kto nigdy nie przyjął np. pewnika wyboru, albo aksjomatu nieskończoności i wypracował techniki matematyczne jedynie w słabych teoriach. Dla kogoś takiego przyjęcie

[19]Nie wnikając w szczegóły techniczne, ciało Z_p składa się z liczb naturalnych 0,1..p–1 z działaniami modulo p. Oznacza to w szególności, że (p–1)+1=0, inaczej niż w „zwykłym" ciele liczb rzeczywistych.

[20]Przez V=L oznaczamy tak zwany aksjomat konstruowalności. Nie wnikając w szczegóły, mówi on tyle, że każdy zbiór da się „skonstruować" ze zbiorów prostszych przy pomocy odpowiedniej formuły pierwszego rzędu. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy np. do monografii [Kunen 1980].

pewnika wyboru czy aksjomatu nieskończoności nosiłoby znamiona niedopuszczalnej arbitralności. Możemy zatem postawić pytanie, czy fakt, że nie jesteśmy w sytuacji kogoś takiego, wynika jedynie z uwarunkowań historycznych, czy z głębszych przyczyn, np. z tego, że istnieje świat obiektów abstrakcyjnych, ma on związki z naszym światem fizycznym i jest on dobrze opisany przez ZFC. Tu wkraczamy na teren dyskusji o uzasadnianiu teorii matematycznych. Przypomnijmy w tym kontekście pogląd Maddy'ego, że aksjomaty ZFC nie mają uprzywilejowanego statusu epistemologicznego, a fakt, że taki status im przypisujemy jest jedynie przypadkiem historycznym (por. [Maddy 1988])[21]. Nawet jeśli taki pogląd uznamy za zbyt daleko idący, to musimy się zastanowić, czy gdyby historyczny rozwój matematyki przebiegał inaczej, to czy nasza (niezweryfikowana empirycznie) wiedza na temat losów Wszechświata za 1000000000 lat nie byłaby inna? Czy w ogóle możliwa jest inna matematyka (i przede wszytskim co to naprawdę znaczy) to odrębne zagadnienie. Przypomnijmy może w tym kontekście pogląd Gödla. Jako realista twierdził on, że teoria mnogości opisuje pewną pozazmysłową rzeczywistość — rzeczywistość zbiorów, zaś narzędziem poznawczym jest intuicja matematyczna. Nie wnikając w analizy jego koncepcji, przytoczmy często cytowane zdanie że *„aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe”* ([Gödel 1947/64,271]), czyli że właśnie ZFC jest tą właściwą teorią opisującą rzeczywistość matematyczną, choć oczywiście w sposób niedoskonały, czego wyrazem jest istnienie zdań niezależnych. Oczywiście koncepcja Gödla wywołała falę krytyki, przede wszystkim ze strony zwolenników kauzalnej teorii wiedzy (por. np. [Benacerraf 1973], [Chihara 1982]). W myśl koncepcji Gödla musielibyśmy zatem zgodzić się z tezą, że fakt, że mamy taką a nie inną matematykę, nie jest jedynie przypadkiem historycznym, ale raczej „dziejową koniecznością”, wynikającą z samej struktury rzeczywistości matematycznej i naszej zdolności jej postrzegania. To jednak oparte jest na silnych założeniach metafizycznych i epistemologicznych.

WNIOSKI: Twierdzenie Gödla jest często nadużywane w filozoficznych sporach. W naszym artykule ograniczyliśmy się do dyskusji na temat barier poznawczych, nie podejmując problemu „umysł–maszyna?”, do którego twierdzenie Gödla też się próbuje stosować. Wyróżniliśmy kilka argumentów przeciwko tezie o ustanawianiu przez twierdzenia Gödla zasadniczych barier poznawczych:

1. Niezależności w matematyce miewają różny status. Czym innym jest niezależność od arytmetyki Peano (lub jej słabych podsystemów),

[21] Dużą rolę procesom historycznym przypisuje Kitcher (por. [Kitcher 1983]).

a czym innym niezależność od teorii mnogości ZFC. Jedynie ten drugi przypadek może być interesujący w kontekście tej dyskusji.

2. W matematyce stosowanej nie potrafimy (jak na razie) wskazać konkretnych przykładów zdań niezależnych, które miałyby wpływ na naszą wiedzę dotyczącą rzeczywistości.

3. Dużą część matematyki klasycznej (w tym ważnych dla zastosowań działów) można rozwijać w słabych podsystemach ZFC, jakimi są np. arytmetyka drugiego rzędu Z_2 i jej podsystemy. Pojawiające się tam niezależności możemy (być może) rozstrzygnąć przez odwołanie się do „teorii–wyroczni", jaką jest ZFC.

4. Nie jest oczywiste, że interesujące teorie muszą być formułowane w językach pierwszego rzędu. Nie ma powodu sądzić, że nie jest możliwe formułowanie ciekawych teorii w językach, do których twierdzenia Gödla nie mają bezpośredniego zastosowania.

5. Fakt, że używamy takiej a nie innej matematyki (w szczególności teorii, do których stosuje się twierdzenie Gödla), wymaga wyjaśnienia.

6. Sam fakt, że jakieś zdanie jest niezależne od używanego formalizmu matematycznego, nie oznacza, że automatycznie pojawia się tu jakaś „bariera poznawcza". Zdanie to może być rozstrzygalne na drodze doświadczalnej.

7. O niemożliwości metafizyki: prawdą jest, że dla każdej teorii metafizycznej sformułowanej w rachunku predykatów pierwszego rzędu będą istniały zdania w języku tej teorii nierozstrzygalne w tej teorii. Czy jednak metafizyka musi być formułowana w takim właśnie języku? Czy te zdania niezależne byłyby istotne? Przypomnijmy tutaj, że sam Gödel interesował się metafizyką (a także teologią) i był, jak to nazywa Wang, „racjonalistycznym optymistą" ([Wang 1987]). Czyżby przeoczył oczywisty (jak twierdzą niektórzy) wniosek ze swojego twierdzenia, że działalność ta jest z góry skazana na niepowodzenie?

BIBLIOGRAFIA

Adamowicz Z., Zbierski P.

[1991] *Logika matematyczna*, PWN, Warszawa

Barwise J.

[1977] *Handbook of mathematical logic*, (ed.), North–Holland, Amsterdam.

[1985] „Model–theoretic logics: background and aims", w: Barwise and Feferman [1985], 3–23.**Barwise J., Feferman S**.

[1985] *Model–theoretic logics*, Springer–Verlag.

Benacerraf P.

[1973] „Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, 70, 1973, 661–680 przedrukowane w: P. Benacerraf & H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, second edition, Cambridge: Cambridge University Press, 403–420.

Chihara C.

[1982] „A Gödelian Thesis Regarding Mathematical Objects: Do They Exist? And Can We Perceive Them?", *Philosophical Review*, 91, 211–227.

Da Costa N.C.A., Doria F.A.

[1992] „Suppes predicates for classical physics", in: Echevieria, Ibarra and Mormann, *The space of mathematics* (eds.), de Gruyter.

Dales H.G., Woodin W.H.

[1987] *An introduction to independence for analyst*, Cambridge University Press, Cambridge.

Detlefsen M.

[1986] *Hilbert's Program*, D. Reidel Publishing Do., Dordrecht.

Drake F.R.

[1989] „On the Foundations of Mathematics in 1987", w: *Logic Colloquium '87*, H–D. Ebbinghaus et al. (eds.), Elsevier Science Publishers.

Freiling C.

[1986] „Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line", *Journal of Symbolic Logic*, 51, 190–200.

Friedman H.

[1981] „On the necessary use of abstract set theory", *Advances in Mathematics*, 41, 209–280.

[1986] „Necessary uses of abstract set theory in finite mathematics, *Advances in Mathematics*, 60, 92–122.

Gödel K.

[1947/64] „What is Cantor's Continuum Problem?, w: Paul Benacerraf & Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Prentice–Hall, 1964, 258–273.

[1970] „A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausible axiom about orders of growth", w: Feferman S. (red.) *Kurt Gödel: Collected Works III*, New York: Oxford University Press, 1995.

Hilbert D., Bernays P.

[1934] *Grundlagen der Mathematik*, Band I, Berlin: Springer–Verlag.

Jech T.

[1973] *The Axiom of Choice*, North–Holland, Amsterdam.

[1977] „About the Axiom of Choice", w: *Handbook of mathematical logic*, Barwise J. (ed.), North–Holland, Amsterdam.

Kitcher P.

[1983] *The nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, New York, Oxford.

Kossak R.

[1991] „Odwrotna matematyka — częściowa realizacja programu Hilberta", *preprint IMPAN 26, seria B.*

Kunen K.

[1980] *Set Theory*, North–Holland.

Maddy P.

[1988] „Believing the axioms. I", *Journal of Symbolic Logic*, 53, 481–511.

[1993] „Does V equal L?", *Journal of Symbolic Logic*, 58, 15–41.

Martin D.A.

[1976] „Hilbert's First Problem: the Continuum Hypothesis", w: *Mathematical developments arising from Hilbert's problems*, F.E. Browder (ed.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol 28, AMS, Providence, Rhode Island, 81–92.

Moore G.H.

[1982] *Zermelo's axiom of choice*, Springer–Verlag.

[1990] „Introductory note to *1947* and *1964*", w Gödel [1990].

Murawski R.

[1987] „Generalizations and strenghtenings of Gödel's incompleteness theorem", in: Srzednicki J. [1987], 84–100.

[1993] „Rozwój programu Hilberta", *Wiadomości Matematyczne XXX,* 51–72.

[1994] „Hilbert's Program: incompleteness theorems vs. partial realisations", w: Woleński J., *Philosophical Logic in Poland*, [red.], Kluwer Academic Publishers, 103–127.

Paris J., Harrington L.

[1977] „A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic", w: [Barwise 1977].

Roitman J.

[1992] „The uses of set theory", *The Mathematical Intelligencer*, 14 (1), 63–69.

Scott D.

[1971] *Axiomatic set theory*, (9 ed.) Proceedings in Symposia in Pure Mathematics, 13, part 1, AMS, Providence, Rhode Island.

Shapiro S.

[1985a] „Second–order languages and mathematical practice", *Journal of Symbolic Logic*, 50, 714–742.

[1991] *Foundations without foundationalism*, Clarendon Press, Oxord.

Simpson S.G.

[1984] „Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations?”, *Journal of Symbolic Logic*, 49, 783–802.

[1987] „Subsystems of Z_2 and Reverse Mathematics”, w: Takeuti G., *Proof Theory*, 2nd edition, North–Holland, Amsterdam, 432–446.

[1988] „Partial Realisations of Hilbert's Program”, *Journal of Symbolic Logic*, 53, 349–363.

Tharp L.H.

[1975] „Which logic is the right logic?”, *Synthese*, 31, 1–21.

Wang H.

[1987] *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge.

Wójtowicz K.

[1996] „Paradoksy skończoności”, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, XVIII, 87–99.

[199?] „Reverse mathematics and the indispensability argument”, w: Jadacki J.J., Paśniczek J. (red.) *The Lvov–Warsow School. New Generation*, Rodopi, Amsterdam [w przygotowaniu].

Życiński J.

[1985] *Teizm i filozofia analityczna*, ZNAK, Kraków.

[1993] *Granice racjonalności*, PWN, Warszawa.