RECENZJE

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XVIII / 1996, s. 133–137*

Jan PIKUL

HISTORYCZNE I WSPÓŁCZESNE KIERUNKI W FILOZOFII MATEMATYKI

- Roman Murawski,*Filozofia matematyki.* Zarys dziejów, Warszawa, PWN 1995, s. 239.

Ta niezbyt duża książka powinna zainteresować zarówno matematyków, jak i filozofów, zwłaszcza zajmujących się filozofią nauki. Autor — jako motto — umieszcza na samym początku swej pracy słowa G. Fregego: „Filozof, który zupełnie nie zna geometrii, jest tylko półfilozofem, zaś matematyk, któremu brak żyłki filozoficznej, jest tylko półmatematykiem". Książka — w intencji Autora — jest próbą wypełnienia luki, jaka w literaturze przedmiotu istnieje nie tylko na polskim rynku wydawniczym. Jest to zwięzłe, syntetyczne opracowanie, przedstawiające podstawowe wyniki filozoficznej refleksji nad matematyką w ujęciu historycznym.

Filozofia matematyki bywała dawniej uprawiana głównie przez filozofów. Jednak, jak zaznacza Autor we *Wstępie*, dziś jest domeną przede wszystkim matematyków. Powodem tego jest szybki rozwój wiedzy matematycznej i specjalizacji w tej dziedzinie, który sprawia, że problemy związane z filozofią matematyki stają się w pełni zrozumiałe tylko dla fachowców — matematyków. Autor jest takim właśnie fachowcem — jako profesor Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu zajmuje się w swej pracy naukowej głównie logiką matematyczną i podstawami matematyki. Pracuje także w dziedzinie historii logiki i jest autorem publikacji *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań (1986 i 1994), do której odwołuje się często w omawianej tu książce.

Prof. Murawski już we *Wstępie* szkicuje dwa wzorce uprawiania matematyki, czyli dwa paradygmaty, które wyznaczają w dziejach matematyki dwa zasadnicze okresy jej rozwoju. Są to: paradygmat Euklidesa,

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

który funkcjonował od początku IV wieku p.n.e. do końca XIX wieku, oraz paradygmat logiczno–teoriomnogościowy, obowiązujący w matematyce obecnie. W pierwszym okresie matematyka była uprawiana jako system quasi–aksjomatyczny, tzn. w zamierzeniu aksjomatyczny, jednak w rzeczywistości lista aksjomatów bywała często daleka od kompletności, a w rozumowaniu dowodowym występowały luki. Często odwoływano się przy tym do intuicji i prawd „oczywistych". Jako język matematyki bywał stosowany nieprecyzyjny język oparty na języku potocznym. Już w XIX wieku zaczął się kształtować nowy paradygmat logiczno–teoriomnogościowy. Paradygmat ten, obowiązujący w matematyce XX–wiecznej, uczynił teorię mnogości podstawową dyscypliną całej matematyki, obecną u podstaw wszystkich innych teorii (na gruncie teorii mnogości można rozwinąć całą matematykę). Język matematyki został wyraźnie wyodrębniony i precyzyjnie uporządkowany. Obowiązuje ścisłość definicji, precyzja dowodu, a wszystkie teorie matematyczne zostały zaksjomatyzowane. Wysiłek matematyków jest w dużej mierze skierowany na zagadnienia podstaw matematyki.

Te dwa okresy rozwoju matematyki zaznaczają się w logicznym układzie pracy prof. Murawskiego. Książka składa się z dwóch części o odmiennym charakterze oraz *Dodatków.* W Części I, zatytułowanej *Poprzednicy współczesnych stanowisk*, Autor przedstawił całą gamę poglądów na matematykę: od starożytności po przełom wieków XIX i XX. W tej części tytułami rozdziałów są po prostu nazwiska wybranych filozofów i matematyków. Rozdziałów jest 15: *Przed Platonem, Platon, Arystoteles, Euklides, Proklos, Mikołaj z Kuzy, Kartezjusz, Blaise Pascal, Gottfried Leibniz, Immanuel Kant, Bernard Bolzano, John Stuart Mill, Richard Dedekind, George Cantor, Henri Poincaré.* Trzy ostatnie nazwiska z tej listy należą już do matematyków, których prace w dziedzinie podstaw matematyki przyczyniły się do ukształtowania paradygmatu logiczno–teoriomnogościowego. Część II książki nosi tytuł *Współczesne kierunki w filozofii matematyki.* Układ materiału jest tu inny: Autor omawia w poszczególnych rozdziałach zasadnicze kierunki we współczesnej filozofii matematyki: *Logicyzm, Intuicjonizm i prądy konstruktywistyczne, Formalizm.* Ostatni rozdział drugiej części książki nosi tytuł *Nowe prądy w filozofii matematyki.* Na końcu książki Autor umieścił trzy dość obszerne *„Dodatki"*: *Z filozoficznych problemów teorii mnogości, Kilka uwag o filozofii geometrii* oraz *Krótkie biogramy.* W tym ostatnim Autor umieścił 38 zwięzłych notek biograficznych dotyczących wybranych myślicieli — filozofów i matematyków, pracujących w dziedzinie podstaw matematyki.

Lektura książki prof. Murawskiego nie wymaga głębszego przygotowania matematycznego. Filozofia matematyki napisana jest przystępnie, Autor zakłada u czytelnika jedynie znajomość podstawowej terminologii filozoficznej i podstawowych pojęć logiki matematycznej. Jest rzeczą zrozumiałą, że lektura staje się nieco trudniejsza w części omawiającej współczesne problemy filozofii matematyki. Ale i tu Autorowi udało się pogodzić przystępność z merytoryczną wartością wykładu. Dla czytelnika słabo orientującego się w problematyce matematycznej być może najtrudniejszym fragmentem lektury okaże się *Dodatek I*, omawiający filozoficzne problemy teorii mnogości. Wynika to jednak z samego charakteru zagadnień, poruszanych w tej części książki.

W Części I Autor na 59 stronach zmieścił 15 rozdziałów. Rozdziały te zawierają bardzo zwięzłe przedstawienie poglądów poszczególnych filozofów i matematyków. Prof. Murawski dokonał wyboru tych myślicieli, którzy do filozofii i metodologii matematyki wnieśli istotnie nowe idee. Czytelnik napotka tu mozaikę poglądów, przy czym Autor stara się unikać ocen (co wyraźnie zaznacza w *Przedmowie*) i nie daje — przynajmniej w tej części książki — podsumowania, które by ukazało ewolucję zasadniczych idei w ciągu wieków. Powiązanie elementów mozaiki w jeden spójny obraz Autor pozostawia czytelnikowi (zarys ewolucji pojęć dotyczących nieskończoności, zbiorów i geometrii znajdzie jednak czytelnik w *Dodatkach I* i *II*). Uderzył mnie brak wśród nazwisk, stanowiących tytuły rozdziałów tej części książki, nazwisk Galileusza, a zwłaszcza Izaaka Newtona. W rozdziale poświęconym Leibnizowi nie spotkałem wzmianki o stworzonym przez niego — niezależnie od Newtona — rachunku różniczkowym i całkowym (jest tylko bardzo ogólne stwierdzenie, że obok osiągnięć filozoficznych Leibniz wniósł istotny wkład do samej matematyki). Widocznie Autor, jako matematyk i filozof matematyki, nie interesuje się zastosowaniami matematyki do badania fizycznego świata.

Część II książki, dotycząca współczesnych problemów w filozofii matematyki, jest obszerniejsza (77 stron) i zawiera dość szczegółowe omówienie trzech zasadniczych kierunków, które powstały z końcem XIX w. i w wieku XX w wyniku intensywnego rozwoju logiki matematycznej i teorii mnogości, a także jako reakcja na tzw. drugi kryzys podstaw matematyki — wynikły z pojawienia się antynomii na terenie Cantorowskiej teorii mnogości. Autor omawia kolejno:

1. Logicyzm — związany przede wszystkim z nazwiskami G. Fregego, G. Peano, B. Russella i A. N. Whiteheada. Prof. Murawski przedstawia powstanie logicyzmu oraz teorię typów, będącą próbą uwolnienia matematyki od antynomii. Logicyzm, który usiłował sprowadzić całą ma-

tematykę do logiki, dokonał właściwie zdaniem Autora czegoś innego: redukcji matematyki do teorii mnogości.

2. Intuicjonizm i prądy konstruktywistyczne. Twórcą intuicjonizmu był L. E. J. Brouwer, kontynuatorami jego idei A. Heyting i A. S. Troelstra — Autor omawia dość szczegółowo ich poglądy. W drugim paragrafie rozdziału, poświęconym prądom konstruktywistycznym, tytuły poszczególnych punktów są dobrą ilustracją przedstawionych stanowisk: Finityzm, Ultraintuicjonizm, Predykatywizm, Klasyczna i konstruktywna matematyka rekurencyjna, Konstruktywizm Bishopa, Mostowskiego stopnie konstruktywności. Autor poświęca więc intuicjonizmowi i konstruktywizmowi sporo miejsca, choć są to poglądy, mocno ograniczające dopuszczalną problematykę matematyczną.

3. Formalizm — w tym rozdziale znajdziemy omówienie programu Hilberta i ograniczenia w jego realizacji wynikające z twierdzeń o niezupełności (twierdzenia Gödla).

4. Nowe prądy w filozofii matematyki. Prof. Murawski przedstawia tu najpierw prace Quine'a, Gödla i Wittgensteina. Z pewnym zdziwieniem spotkałem w trakcie lektury tego rozdziału całe dwie strony poświęcone poglądom na matematykę klasyków marksizmu i współczesnych marksistów. Następnie Autor omawia nowe próby spojrzenia na matematykę, które starają się uniknąć jednostronności klasycznych koncepcji matematyki: analizę niesformalizowanej matematyki w wydaniu I. Lakatosa (tzw. *quasi*–empirycyzm), koncepcję R. L. Wildera matematyki jako systemu kulturowego, propozycję R. Hersha (będącą syntezą poglądów Lakatosa i Wildera) oraz tzw. matematykę intensjonalną.

Z *Dodatków* umieszczonych na końcu książki najobszerniejszy jest pierwszy, przedstawiający filozoficzne problemy fundamentalnej teorii współczesnej matematyki — teorii mnogości. Znajdziemy tu szkic historycznego rozwoju pojęcia nieskończoności i pojęcia zbioru, Autor porusza problem sposobu istnienia zbiorów, następnie przedstawia rozwój teorii mnogości, jej aksjomatyzację i związane z tym problemy. Wydaje się, że badania w tej dziedzinie są właściwą drogą do zapewnienia pewności i niesprzeczności poznaniu matematycznemu.

Prof. Murawski pisze we *Wstępie* do swej książki: „Wśród problemów rozważanych przez filozofię matematyki można wyróżnić kwestie ontologiczne i epistemologiczne". Do tej drugiej grupy zagadnień Autor zalicza także problemy metodologiczne. Wydaje się, że tym kwestiom, a zwłaszcza problemom metodologicznym w matematyce, prof. Murawski przyznał w swej pracy więcej miejsca, szczególnie przy omawianiu kierunków współczesnych. Może właśnie dlatego Autor w Części II pomija zagadnienie platonizmu we współczesnej matematyce, choć platoński realizm uznający niezależne od naszego poznania istnienie obiektów matematycznych, które raczej „odkrywamy" i „zastajemy" niż „konstruujemy", jest stanowiskiem wśród dzisiejszych matematyków dość częstym (platonizm jest jednak zaprezentowany w *Dodatku I* jako jedno ze stanowisk w kwestii istnienia zbiorów).

W *Przedmowie* książki prof. Murawskiego spotkałem takie zdanie: „Czytelnik z pewnością domyśli się w trakcie lektury, że autor jest matematykiem i logikiem — stąd tyle w książce odniesień do logiki i matematyki". Jest to rzeczywiście w trakcie lektury dobrze widoczne. Z jednej strony jest to duży pozytyw tej książki: Autor wie, o czym pisze. Zagadnienia z dziedziny podstaw matematyki i metamatematyki, zwłaszcza te, które szczególnie interesują filozofa matematyki, są mu dobrze znane. Z drugiej strony czytelnik o szerszych zainteresowaniach filozoficznych, nie ograniczonych do problemów metodologii samej matematyki, może odczuć pewne braki omawianej książki, wynikające zapewne właśnie z faktu, że Autor jest bardziej matematykiem niż filozofem: w szczególności prof. Murawski pomija zupełnie bardzo interesujące zagadnienie skuteczności matematyki w badaniu fizycznej rzeczywistości świata. To, że „przyroda jest matematyczna", że metoda matematyczno–empiryczna od momentu swego powstania odnosi tak niezwykłe rezultaty, a sama matematyka wydaje się być wręcz tworzywem fizycznego świata, jest interesujące nie tylko dla filozofa przyrody. Także filozof matematyki, stawiając pytania o przedmiot matematyki i sposób istnienia obiektów badanych przez matematykę, powinien chyba uwzględnić te kwestie.

Jan Pikul