ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XVIII / 1996, s. 100–103*

ARTYKUŁY

Marcin SKULIMOWSKI

PARADOKSALNY ROZKŁAD KULI

W roku 1924 w czasopiśmie naukowym *Fundamenta Matematicae* dwaj polscy matematycy Stefan Banach[1] i Alfred Tarski[2] opublikowali tzw. twierdzenie o paradoksalnym rozkładzie kuli.[3] Zadziwiająca teza twierdzenia jest konsekwencją jednego z aksjomatów teorii mnogości.

Banach z Tarskim zajmowali się problemem *równoważności zbiorów przez rozkład skończony.* W przestrzeni $\mathbf{R}^n (n = 1, 2)$ dwa zbiory A, B są równoważne przez rozkład skończony jeżeli obydwa można podzielić na identyczną, skończoną liczbę zbiorów $A_1, ..., A_k$, $B_1, ..., B_k$ takich, że:

(i) $A = A_1 \cup ... \cup A_k, B = B_1 \cup ... \cup B_k$,

(ii) dla $i \neq j A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$,

(iii) kawałki A_i i B_i są przystające.[4]

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Stefan Banach (1892–1945), matematyk–samouk. Nigdy nie ukończył studiów matematycznych. Od 1924 r. profesor Uniwersytetu we Lwowie. Współzałożyciel czasopisma *Studia Mathematica.* W okresie międzywojennym twórca Lwowskiej Szkoły Matematycznej (S. Mazur, H. Steinhaus, W. Orlicz), która razem ze Szkołą Warszawską (W. Sierpiński, S. Mazurkiewicz, K. Kuratowski) wydźwignęła polską matematykę na czołowe miejsce w świecie. Współtwórca analizy funkcjonalnej (wprowadził m.in. fundamentalne pojęcie przestrzeni zwanej potem przestrzenią Banacha). Osiągnięcia w wielu działach matematyki: topologii, teorii miary, teorii funkcji rzeczywistych. Jeden z największych matematyków tego okresu.

[2]Alfred Tarski (1902–1983), logik, filozof, matematyk. Od 1946 r. profesor na Uniwersytecie w Berkeley. Badania swoje koncentrował nad podstawami teorii mnogości (liczby nieosiągalne, zagadnienia związane z pewnikiem wyboru i hipotezą continuum) oraz metodologii nauk dedukcyjnych (semantyczna teoria prawdy, teoria modeli). Wyniki jego prac wywarły wpływ na rozwój neopozytywizmu i tzw. filozofii semantycznej. Współtwórca Warszawskiej Szkoły Logicznej. Ważne osiągnięcia w różnych działach matematyki m.in. w analizie funkcjonalnej.

[3]*Sur la decomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruentes*, FM 6, 1924, s. 244–277. Twierdzenie to nazywane jest czasem teorematem Banacha — Tarskiego.

[4]Istnieje między nimi przekształcenie zachowujące odległość punktów (przesunięcie, obrót, symetria). Zbiory przystające, na płaszczyźnie mają równe pola powierzchni, w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ równe objętości.

Okazuje się (co udowodnili Banach i Tarski), że dla zbiorów w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ własność ta jest powszechnie obowiązującą regułą — każde dwa zbiory ograniczone w $\mathbf{R}^3$ są równoważne przez rozkład skończony. Kulę o danym promieniu możemy pociąć na skończoną liczbę kawałków i z tych kawałków utworzyć kulę o promieniu dwa razy większym. Musi być przy tym spełniony jeden warunek: kawałki, na które dzielimy kulę, muszą być niemierzalne (bez objętości). Ze zbiorami nie posiadającymi objętości matematycy spotykają się w teorii miary.

Pojęcie *miary* jest matematycznym uogólnieniem i rozszerzeniem intuicyjnych pojęć długości (miara 1–wymiarowa), pola (miara 2–wymiarowa) i objętości (miara 3–wymiarowa) znanych z geometrii elementarnej. Objętość jest to liczba z przedziału $[0, +\infty]$, którą przyporządkowujemy zbiorowi punktów w $\mathbf{R}^3$. Przyporządkowanie to określone jest funkcją, tzw. miarą, która jest określona na pewnej rodzinie X zbiorów w $\mathbf{R}^3$. Zwykle zapisujemy $\mu\colon X \to [0, +\infty]$. Miara spełnia naturalne aksjomaty:

(1) miara zbioru pustego jest równa zero,

(2) miara skończonej sumy zbiorów rozłącznych równa jest sumie miar poszczególnych zbiorów,

(3) jeżeli dodatkowo miary dwóch zbiorów przystających są równe, to miarę taką nazywamy niezmienniczą ze względu na przystawanie.

Zbiory należące do rodziny X, na której określona jest miara, nazywamy zbiorami mierzalnymi. Matematycy sformułowali osobliwe pytanie: czy istnieje miara μ określona na rodzinie wszystkich podzbiorów przestrzeni $\mathbf{R}^3$? (czy wszystkie zbiory w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ posiadają objętość?). I otrzymali zaskakujący wynik: miara taka nie istnieje — istnieją w $\mathbf{R}^3$ zbiory punktów nie posiadające takiej własności jak objętość, a mianowicie zbiory niemierzalne (nie należy ich mylić ze zbiorami, których objętość jest równa zeru, np. punkt, figura płaska). Zbiory niemierzalne potrafimy formalnie konstruować[5], mimo że nie jesteśmy w stanie ich sobie wyobrazić. W każdej takiej konstrukcji, wykorzystywany jest jeden z aksjomatów cantorowskiej teorii mnogości, tzw. pewnik wyboru (sformułowany przez Ernsta Zermelo w 1904 r.).

Pewnik ten mówi, że mając dowolną rodzinę zbiorów rozłącznych, możemy z każdego zbioru rodziny wybrać po jednym elemencie i w ten sposób utworzyć nowy zbiór. Pewnik wyboru jest intuicyjnie oczywisty. Pewne jego konsekwencje są jednak trudne do zaakceptowania (np.

[5]Przykład konstrukcji zbioru niemierzalnego względem tzw. miary niezmienniczej na przesunięcia w: A. Birholc, *Analiza matematyczna–Funkcje wielu zmiennych*, PWN 1986, s. 260.

teoremat Banacha–Tarskiego). W związku z tym wielu matematyków związanych z nurtem intuicjonizmu (konstruktywizmu) L.E.J Brouwera odrzucało go (Herman Weyl). Intuicjonizm głosił bowiem, że budując wszelkie teorie matematyczne należy opierać się na podstawowej intuicji, jaką stanowią liczby naturalne. Obiekty i tezy matematyczne nieredukowalne w skończenie wielu krokach do pierwotnej intuicji liczb naturalnych konstruktywiści odrzucali.[6]

Podejrzewano też, że pewnik wyboru może być sprzeczny z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości. Problem był bardzo poważny, gdyż teoria ta leży u podstaw wielu działów matematyki. Dopiero w 1940 r. Kurt Gödel pokazał, że jeżeli aksjomatyka ograniczona (bez pewnika wyboru) jest niesprzeczna, to również aksjomatyka z dołączonym pewnikiem wyboru (standardowa) jest niesprzeczna.[7] Całkowitą niezależność pewnika wyboru wykazał w 1963 r. Joseph P.Cohen.[8] Obecnie pewnik wyboru jest powszechnie stosowany w matematyce. Dowody, w których interweniuje, nazywane są jednak nieefektywnymi. Przykładem może być dowód twierdzenia Zermelo (dla każdego zbioru istnieje relacja, która dobrze go porządkuje). Dowód tego twierdzenia potrafimy przeprowadzić, wykorzystując pewnik wyboru. Nie podaje on jednak algorytmu, jak taki porządek skonstruować. W szczególności nikomu nie udało się jeszcze dobrze uporządkować zbioru liczb rzeczywistych.

Podsumujmy nasze krótkie rozważania. Widzimy, że w przypadku pewnika wyboru nasuwa się konkluzja analogiczna do tej, na którą wskazał paradoks zbiorów[9] wykryty w teorii mnogości przez Bertranda Rus-

[6]Intuicjoniści przyjmowali tylko tzw. *konstruktywne dowody* istnienia — zaczynające się od intuicji liczb naturalnych. Dlatego odrzucali wiele rezultatów matematyki klasycznej.

[7]K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axiom of set–theory,* Annales of Mathematics Studies 3, Princeton 1940.

[8]Pokazał on także niezależność sformułowanej przez Cantora tzw. *hipotezy continuum* (nie istnieje na odcinku zbiór nieskończony, który nie jest równoliczny ani z całym odcinkiem, ani ze zbiorem liczb naturalnych), która może być przyjęta w aksjomatyce zamiast pewnika wyboru. Zob. P.J. Cohen, *The independence of the continuum hipothesis,* „Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA”, 50 (1963), s. 1143–1148, 51 (1964), s. 105–110. Na temat hipotezy continuum zob. Philip J. Davis, R. Hersh, *Świat matematyki,* PWN 1994, s. 196–208. Za swoje osiągnięcia Cohen otrzymał medal Fieldsa.

[9]H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, seria Biblioteka Matematyczna, tom 30, s. 28–29: ”Rozpatrzmy zbiór Z złożony z wszystkich takich zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami (np. zbiór matematyków nie jest matematykiem, natomiast zbiór wszystkich rzeczy o których można pomyśleć, jest swoim elementem — M.S.). Dowolny zbiór A jest więc elementem zbioru Z wtedy i tylko wtedy, gdy A nie jest elementem A. Pojęcie zbioru Z prowadzi do sprzeczności. Zapytajmy bo-

sella.[10] Intuicyjnie poprawny pewnik wyboru dopuszcza istnienie zbiorów niemierzalnych, co prowadzi do stwierdzeń sprzecznych z intuicją (teoremat Banacha–Tarskiego). Chcąc jednak wyeliminować z matematyki takie tezy, musielibyśmy odrzucić pewnik wyboru. Przychodzi na myśl oczywisty wniosek. Wiedzy intuicyjnej w matematyce dowierzać nie należy. Tylko umysł uwolniony od ograniczeń związanych z rozumowaniem intuicyjnym, nie narażony na spotkanie intelektualnych pułapek–antynomii, może bezpiecznie poruszać się wśród matematycznych abstrakcji.

wiem, czy Z jest elementem zbioru Z. Jeśli jest, to z definicji zbioru Z wynika, że Z nie jest swoim elementem, czyli Z nie jest elementem zbioru Z. Jeśli zaś Z nie jest swoim własnym elementem, to z definicji

zbioru Z wynika, że Z jest elementem zbioru Z. Otrzymaliśmy sprzeczność. Antynomia Russella dała się skonstruować tylko dlatego, że operowano tu intuicyjnym, niesprecyzowanym pojęciem zbioru." (antynomia ta przyczyniła się do gruntownej przebudowy i uściślenia teorii mnogości).

[10]B.Russell, *The Principles of Mathematics,* Cambridge University Press, Cambridge 1903.