

Krzysztof WÓJTOWICZ

PARADOKSY SKOŃCZONOŚCI

Gaisi Takeuti, wybitny współczesny logik w swoim artykule *Set Theory and Proof Theory* ([T]) określa matematykę współczesną jako świat nieskończonego umysłu (terminologia ta pochodzi od Gödla). Matematycy, obdarzeni umysłami skończonymi, starają się poznać ten świat poprzez formułowanie odpowiednich aksjomatów dla teorii mnogości, które odzwierciedlają nasze intuicje na temat świata nieskończonego. Nie ulega wątpliwości, że Takeuti ma tu na myśli świat aktualnie nieskończony, który jest przejrzysty i zrozumiały dla umysłu nieskończonego, a zrozumiały jedynie fragmentarycznie i w sposób wielce niedoskonały dla ludzi.

Powyższe rozważania można uznać za wyrażenie emocji będących udziałem matematyka badającego teorię mnogości (jak Gödel i Takeuti), czy inne działy matematyki. Jednak dyskusja na temat skończoności i nieskończoności — zarówno potencjalnej, jak i aktualnej — nie jest nowa i pochodzi już od Arystotelesa, który wprowadził to rozróżnienie. W czasach bardziej nam współczesnych Bolzano w *Paradoksach nieskończoności* ([Bo]) rozważa zbiór prawd jako zbiór aktualnie nieskończony; posługuje się on jednak pojęciem klasy obiektów posiadających daną własność, co — jak wiadomo — prowadzi do paradoksu Russella. W teorii mnogości paradoks ten zostaje wyeliminowany przez wprowadzenie ograniczonego aksjomatu wyróżniania, zaś istnienie zbioru nieskończonego zagwarantowane jest odpowiednim aksjomatem. Cantorowska teoria mnogości posługuje się pojęciem nieskończoności aktualnej; sam Cantor twierdzi, że pojęcie nieskończoności potencjalnej tak naprawdę zakłada istnienie nieskończoności aktualnej (por. [C]). Innego zdania jest Skolem, według którego pojęcie nieskończoności aktualnej nie ma dobrego uzasadnienia. Również Robinson kwestionuje istnienie nieskończoności aktualnej w jakimkolwiek sensie tego słowa (por. [R]).

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

W matematyce współczesnej pojęcie Cantorowskie jest dominujące — matematycy na co dzień posługują się obiektami nieskończonymi, nie zwracając uwagi na filozoficzne kontrowersje, jakie narosły wokół pojęcia nieskończoności. W niniejszym artykule pokażemy na kilku przykładach, że niektóre proste problemy matematyczne, zaczerpnięte niejako bezpośrednio z życia codziennego, nie dadzą się rozwiązać bez odwołań do zbiorów aktualnie nieskończonych. Będziemy zatem starali się odpowiedzieć na następujące:

Pytanie zasadnicze: czego mieszkaniac potencjalnie nieskończonego świata może dowiedzieć się o tym świecie bez odwoływania się do wiedzy na temat świata nieskończonego aktualnie?

Powyższe sformułowanie nie jest jednoznaczne. Musimy doprecyzować pojęcie „możliwej wiedzy”. Nie jest bowiem oczywiste, w jakim systemie aksjomatycznym (chodzi nam o wiedzę matematyczną) wiedza opisująca dany obiekt potencjalnie nieskończony ma być wyrażona. Podanie ogólnej reguły nie jest tu chyba możliwe. Na razie ograniczymy się do pewnego szczególnego przypadku obiektu potencjalnie nieskończonego, a mianowicie do zbioru liczb naturalnych. W przypadku liczb naturalnych nie ma chyba wątpliwości co do tego, że jest to obiekt potencjalnie nieskończony, gdyż reguły generowania kolejnych jego elementów są bardzo proste.¹ Pozostaje pytanie o to, jaki system aksjomatyczny opisuje zbiór liczb naturalnych. Naturalnym kandydatem jest arytmetyka Peano pierwszego rzędu. Dyskusja na temat przyjęcia logiki pierwszego rzędu jako podstawy matematyki nie jest zakończona; za formułowaniem matematyki w logice pierwszego rzędu opowiadali się Gödel i Skolem, ich oponentem był Zermelo, a współcześnie np. Shapiro (por. [Sh85], [Sh91]). Przyjmijmy jednak hipotezę roboczą, podobnie jak Drake w [D], że aby badać matematykę, badamy jej przybliżenia wyrażone w językach pierwszego rzędu.²

¹Uwaga o prostocie reguł generowania nie jest bezpodstawna. Nie jest bowiem oczywiste, jakie zbiory nieskończone zasługują na miano potencjalnie nieskończonych. Intuicyjnie rzecz biorąc, zbiór nieskończony powstaje poprzez kolejne zastosowanie pewnej prostej (w sensie: zrozumiałej dla nas) reguły. Hailperin ([H]) utożsamia zbiór potencjalnie nieskończony z systemem Posta, danym przez skończony zbiór symboli, wyrażen początkowych i produkcji (reguł generowania nowych wyrażen). Nie wnikając w to, czy ta konkretna definicja jest najbardziej odpowiednia, zasadne wydaje się przyjęcie założenia, że aby mówić o zbiorze potencjalnie nieskończonym musimy mieć zrozumiałe reguły generowania kolejnych obiektów.

²Warto tu jednak zaznaczyć, że teza o logice pierwszego rzędu jako o podstawowej logice dla matematyki ma licznych przeciwników. Por. monografia [B-F], w której analizowane są logiki rozszerzające logikę pierwszego rzędu, a nadające się lepiej (według autorów) do opisu pewnych fragmentów matematyki. Logice drugiego rzędu

I

Inspiracją dla rozważania problemu wiedzy na temat świata potencjalnie nieskończonego są pewne twierdzenia matematyczne dotyczące niedowodliwości zdań kombinatorycznych i teoriolicebowych (i nie tylko) w pewnych systemach aksjomatycznych. Już Gödel udowodnił, że bogate, rekurencyjnie aksjomatyzowalne teorie są niezupełne, co oznacza, że istnieją zdania, wyrażone w języku teorii, których się nie da ani udowodnić, ani obalić. W przypadku teorii mnogości ZF (teoria Zermelo–Fraenckla) dość wcześnie odkryto takie zdania, na przykład pewnik wyboru i hipotezę *continuum*, których niesprzeczność z teorią ZF udowodnił Gödel w r. 1940, a niezależność Cohen w r. 1963. Na mocy twierdzenia Gödla także arytmetyka Peano jest teorią niezupełną, jednak aż do r. 1977 nie były znane konkretne przykłady zdań niezależnych. Sam dowód Gödla był niekonstruktywny, i udowadniał istnienie zdania, które, mówiąc nieformalnie, stwierdzało, że nie ma ono dowodu, a więc wyrażało pewien fakt metajęzykowy. Jednak nie było to zdanie o „konkretnej” treści matematycznej (jak np. twierdzenie Banacha–Steinhausa, czy Stokesa); dowód jego opierał się na argumente przekątniowym, będącym pewnego rodzaju trikiem. (Logicy być może nie do końca zgodziliby się ze stwierdzeniem, że zdanie Gödla jest pozbawione konkretnej treści. Smoryński twierdzi, że jest to bardzo konkretne zdanie, jednak takie stanowisko jest, jak się wydaje, odosobnione.) W r. 1977 Paris i Harrington podali przykład zdania o konkretnej treści kombinatorycznej, które jest niezależne od arytmetyki Peano. Zaprezentujemy je podobnie jak w artykule [Si 87b].

Niech dla danego zbioru X , „ $[X]^k$ ” oznacza zbiór jego k -elementowych podzbiorów, zaś „ $\text{card } X$ ” oznacza jego moc (ilość elementów). Zachodzi wówczas następujące zmodyfikowane skończone twierdzenie Ramseya:

Dla wszystkich k, l, m istnieje n tak duże, że jeżeli $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ oraz jeżeli $[X]^k = C_1 \cup \dots \cup C_l$, to istnieje zbiór Y zawarty w X taki, że $\text{card } Y \geq m$, $\text{card } Y \geq \min(Y)$ oraz $[Y]^k \subseteq C_i$ dla pewnego $i \leq l$.

Zmodyfikowane twierdzenie Ramseya jest niedowodliwe w arytmetyce Peano, ale jest dowodliwe w teorii mnogości ZFC. W jego dowodzie w istotny sposób wykorzystuje się nieskończone twierdzenie Ramseya mówiące o podziałowych własnościach zbiorów nieskończonych.³

i obronie tezy o jej podstawowym dla matematyki charakterze poświęcona jest monografia [Sh91].

³Nieskończone twierdzenie Ramseya mówi, że dla nieskończonych zbiorów X zachodzi: jeśli $[X]^k = C_1 \cup \dots \cup C_l$, to istnieje zbiór nieskończony $Y \subseteq X$ taki, że $[Y]^k \subseteq C_i$, dla pewnego i .

Zmodyfikowane twierdzenie Ramseya w wypadku gdy $k = l = 2$, można zilustrować w sposób następujący: dla każdego m istnieje takie n , że następujący fakt ma miejsce. Rozważmy zbiór n osób o tej własności, iż n -ta osoba uważa, że liczba n jest dużą liczbą. Wówczas w tym zbiorze istnieje takich m osób, że wszystkie te osoby znają się nawzajem, albo żadna z nich nie zna żadnej innej spośród tych wyróżnionych osób i, co więcej, przynajmniej jedna osoba uważa, że liczba m jest duża (czyli, że wyróżniona grupa osób jest duża).⁴ W tym przypadku warunek $k = 2$ oznacza, że rozważamy dwuelementowe zbiory osób (pary), zaś warunek $l = 2$ oznacza, że zbiór par osób dzielimy na dwie części: pary znających się osób i pary nie znających się osób. Dla $k, l \geq 2$ ilustracja ta byłaby podobna.⁵

Możemy zatem stwierdzić, że aby mieć pewność co do tego, czy nasi goście znają się, czy też nie, musimy odwoływać się do teorii mnogości i do informacji dotyczących podziałowych własności zbiorów nieskończonych.⁶

Wniosek ten wydaje się być trochę paradoksalny. Aby dowiedzieć się czegoś o potencjalnie nieskończonym świecie, musimy odwoływać się do informacji na temat zbioru aktualnie nieskończonego. Warto zwrócić uwagę na fakt, że w naszym języku możemy mówić jedynie o zbiorach skończonych — zmienne przebiegają klasę zbiorów skończonych. Przy nieco dalej idącej interpretacji moglibyśmy stwierdzić, że aby udowodnić zdanie ogólne o obiektach skończonych (albo zdanie szczegółowe mówiące o nieistnieniu obiektu danego typu), musimy odwoływać się do faktów na temat zbiorów nieskończonych.

Rozważmy nieco inny przykład, dotyczący drzew (por. [Si87b]). Drzewem nazwiemy skończony zbiór T częściowo uporządkowany taki, że

- (i) T ma element minimalny (korzeń drzewa);

⁴W zwykłej wersji twierdzenia Ramseya brak jest warunku „ $\text{card } Y \geq \min(Y)$ ”. W przykładzie dla $k = l = 2$ znaczy to zatem, że wśród n osób istnieje podgrupa m osób, z których albo wszystkie znają się nawzajem, albo żadna osoba nie zna żadnej innej z tej grupy. Ciekawe jest, że ta wersja jest dowodliwa bez odwoływania się do nieskończonej wersji twierdzenia Ramseya.

⁵Oznacza to, że k -elementowe zbiory osób dzielimy na l części, na przykład ze względu na to, jaki wynik dana k -elementowa grupa osób uzyska jako sztafeta w biegu na n kilometrów (albo w jakim czasie rozmontuje na części samochód etc.). Twierdzenie Ramseya mówi, że istnieje m -elementowy podzbiór Y zbioru X taki, że każda k -elementowa ekipa, utworzona z członków zbioru Y uzyska taki sam wynik. Zbiór ten nosi nazwę *jednorodnego*. Często mówi się też o *kolorowaniu* k -elementowych podzbiorów za pomocą l kolorów C_1, \dots, C_l . Jednorodność zbioru Y wyraża się w ten sposób, że każdy jego k -elementowy podzbiór ma ten sam kolor.

⁶Mówiąc bardziej ściśle: aby mieć pewność co do tego, że niezależnie od tego, jaką liczbę m ustalimy, to zawsze będziemy mogli zaprosić tyle osób, że...

(ii) dla każdego elementu $x \in T$, zbiór poprzedników x jest liniowo uporządkowany.

Każde dwa elementy drzewa x, y mają największe ograniczenie dolne, które oznaczamy $x \wedge y$. Niech T i S będą drzewami. Włożeniem T w S nazwiemy funkcję $\phi: T \rightarrow S$ taką, że dla wszystkich $x, y \in T$, $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y)$. Powiemy, że drzewo T jest wkładalne w drzewo S (co oznaczamy przez $T \vdash S$), jeżeli istnieje włożenie T w S .

Możemy teraz sformułować skończoną wersję twierdzenia Kruskala, pochodzącą od Friedmana: Dla każdej liczby naturalnej C istnieje liczba naturalna $n = n_c$, taka, że jeśli T_1, \dots, T_n jest skończonym ciągiem drzew, takim, że $\text{card}(T) \leq c$ i dla $i \leq n$, to istnieją dwa różne i, j takie, że $i \leq j \leq n$, oraz $T_i \vdash T_j$.

Okazuje się, że podana wyżej wersja twierdzenia Kruskala nie jest dowodliwa w arytmetyce Peano, i że do jej udowodnienia potrzebna jest nieskończona wersja twierdzenia Kruskala (która mówi, że w każdym nieskończonym ciągu drzew znajdują się dwa drzewa, z których jedno jest wkładalne w drugie).

Przytoczone powyżej twierdzenie Kruskala mówi tyle, że każdy ciąg drzew o pewnej długości (spełniający pewien dodatkowy, techniczny warunek wzrostu) zawiera parę drzew taką, że jedno z drzew jest wkładalne w drugie. Zdanie to odnosi się do potencjalnie nieskończonego zbioru wszystkich skończonych ciągów składających się ze specyficznych grafów skończonych (drzew), spełniających pewien techniczny warunek wzrostu. Nie ulega wątpliwości, że zbiór ten możemy zaliczyć do zbiorów potencjalnie nieskończonych. Reguły generowania kolejnego ciągu drzew z ciągów już istniejących są proste, konstruktywne i spełniają „warunek prostoty”.

Powstaje pytanie, dlaczego nie można po prostu do arytmetyki Peano dołączyć twierdzenia Ramseya i twierdzenia Kruskala (oraz kilku innych niezależnych od arytmetyki Peano twierdzeń tego typu), aby wyeliminować paradoksy omawiane powyżej. Nie będzie wówczas zdań na temat świata potencjalnie nieskończonego niedowodliwych w naszej teorii tego świata. Podejście takie jednak powoduje wklanie się w trudności dwójakiej natury:

(1) Każde skończone (a nawet każde rekurencyjne) rozszerzenie naszej teorii będzie, na mocy twierdzenia Gödla, niezupełne. Można owszem mieć nadzieję że „konkretnych zdań matematycznych” niezależnych od naszej teorii jest skończenie wiele. W takiej sytuacji wystarczyłoby dołączyć je wszystkie, a zdania pozostałe zaliczyć do klasy zdań „patologicznych”, powstających poprzez niekonstruktywne, trikowe argumenty.

Zdania takie nie miałyby żadnego znaczenia z punktu widzenia zdobywania istotnej wiedzy o świecie.⁷ Nie ma jednak gwarancji, że takich zdań jest skończenie wiele i że dla każdego rekurencyjnego rozszerzenia naszej teorii nie istnieją istotne, pełne konkretnej treści zdania niezależne. Z kolei nierekurencyjne rozszerzenie naszej teorii do teorii zupełnej (takie oczywiście istnieje) trudno byłoby zaliczyć do klasy obiektów potencjalnie nieskończonych, gdyż brak jest prostych reguł generowania (brak jest tu w ogóle jakichkolwiek skończonych reguł generowania). Mielibyśmy wówczas opis świata potencjalnie nieskończonego, ale sam opis byłby zbiorem aktualnie nieskończonym. Rozwiązanie to nie jest zadowalające.

(2) Drugi problem jest z filozoficznego punktu widzenia znacznie poważniejszej natury. Gdybyśmy nawet uznali, że istotnych (przy całej niejednoznaczności tego terminu) zdań niezależnych jest skończenie wiele i rekurencyjne uzupełnienie naszej teorii istnieje, to na podstawie jakich kryteriów mielibyśmy decydować, czy dla danego zdania niezależnego ϕ do naszej teorii dołączać ϕ , czy jego negację? Wymagałoby to „całościowego oglądu” tworzonego przez nas potencjalnie nieskończonego świata, dzięki któremu uzyskalibyśmy wiedzę, czy w klasie np. ciągów skończonych drzew znajdzie się ciąg o pewnych własnościach, czy też nie. To z kolei trudno byłoby pogodzić z koncepcją zbioru potencjalnie nieskończonego jako dopiero tworzonego obiektu.

Z powyższych rozważań wynika, że pojęcie zbioru (obiektu) potencjalnie nieskończonego jest słabe; zbyt słabe, aby nie wikłając się w trudności można było oprzeć na nim nawet te fragmenty matematyki, które potencjalnie nieskończone obiekty opisują. Aby dobrze opisać rzeczywistość potencjalnie nieskończoną, musimy korzystać z wiedzy na temat obiektów nieskończonych. Jak do tej wiedzy dochodzimy i jak ją uzasadniamy, to odrębne zagadnienie.

II

W poprzednim paragrafie analizowaliśmy związki pomiędzy światem potencjalnie nieskończonym a światem aktualnie nieskończonym. Wiedzę rozumieliśmy przy tym jako ogół konsekwencji wynikających z danej teorii. Takie rozumienie wiedzy nie pozwala na analizy dotyczące „złożoności obliczeniowej” procesu dochodzenia do wniosków; krótko mówiąc,

⁷Tu pojawia się problem, co to znaczy „istotna wiedza o świecie”. Dla specjalisty od równań różniczkowych Gödrowskie zdanie niezależne będzie pewnego rodzaju ciekawostką, podczas gdy dla logika znajomość zdań tego typu będzie istotnym wzbogaceniem wiedzy o jego świecie. Jednak można zaryzykować twierdzenie, że logicy są w tym przypadku wyjątkiem i że pojęcie „zdania o konkretnej treści matematycznej” jest przez matematyków rozumiane podobnie.

nie uwzględnia ona faktu, że dowiedzenie pewnych twierdzeń i rozstrzygnięcie pewnych problemów może być niemożliwe z praktycznego punktu widzenia. W tym paragrafie odejdziemy od koncepcji wiedzy, jako „ogółu konsekwencji danej teorii” na rzecz „praktycznie uzyskiwalnej wiedzy”. Polega to oczywiście na przejściu od możliwości logicznej (wiemy to, czego udowodnienie jest logicznie możliwe, tzn. możliwość udowodnienia tych zdań jest logicznie niesprzeczna) do możliwości praktycznej (wiemy to, co *praktycznie* możemy udowodnić). Pojęcie możliwości praktycznej jest oczywiście zmienne i nieprecyzyjne, jednak użycie go jest konieczne dla lepszego zrozumienia struktury naszej wiedzy.

Zwróćmy uwagę na fakt, że podobnie jak w przypadku twierdzenia Ramseya, konkretne instancje twierdzenia Kruskala, tzn. zdania postaci np. „dla $c=999$ istnieje takie n , że...” są dowodliwe w PA. Mamy tu jednak do czynienia z ciekawym zjawiskiem. Dowody tych konkretnych instancji są niezwykle skomplikowane. Jak udowodnił Friedman (por. [Si 87b]), dla $c=12$ odpowiednia, spełniająca warunki twierdzenia liczba $n = n_{12}$ byłaby większa niż $2^{2^{\dots^2}}$ (kropki oznaczają 1000 wykładników). Co więcej, dowód, że dla $c = 12$ istnieje odpowiednie $n = n_{12}$ miałby więcej niż $2^{2^{\dots^2}}$ kroków (kropki oznaczają 1000 wykładników).

Powstaje pytanie: jaki jest status wiedzy tego typu? Dla finitysty, odrzucającego istnienie zbiorów nieskończonych udowodnienie tej konkretnej, prostej w sformułowaniu, instancji twierdzenia Kruskala nigdy nie będzie możliwe. Hipoteza o istnieniu odpowiedniego ciągu drzew pozostanie dla niego hipotezą nierozstrzygniętą, gdyż śmiało można uznać, że przeprowadzenie dowodu tej długości jest niemożliwe w praktyce; być może spędzi on całe życie na (oczywiście bezowocnym) poszukiwaniu dowodu albo kontrprzykładu.⁸ Jednak jego kolega wierzący w zbiory nieskończone będzie przekonany, że taki ciąg drzew nie istnieje i będzie potrafił ten fakt (w swoim pojęciu) udowodnić. Z logicznego punktu widzenia przytoczona powyżej konkretna instancja twierdzenia Kruskala oczywiście jest fragmentem wiedzy finitysty na temat świata, gdyż for-

⁸Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że długość „praktycznych” dowodów matematycznych (tzn. takich, jakie pojawiają się w artykułach, na wykładach czy seminariach) nie zawsze odzwierciedla logiczną złożoność danego dowodu. Często mamy bowiem do czynienia z dużymi uproszczeniami, które mogą wynikać np. z odwołania się do metateorii albo do wyników silniejszej teorii. Jednak wydaje się, że w przypadku minimalistycznego stanowiska, odrzucającego istnienie zbiorów (aktualnie) nieskończonych, tego typu uproszczenia nie będą się pojawiać. Z całą pewnością zaś złożoność logiczna odzwierciedla rzeczywistą długość dowodu przy formalistycznym rozumieniu matematyki jako gry symboli.

malny jej dowód w teorii finitysty istnieje (jest tylko dość złożony, ale to przy takim rozumieniu wiedzy nie ma znaczenia). Czy jednak i ten wniosek nie jest nieco paradoksalny? Finitysta nie wie, że „wie”, jaka jest odpowiedź na pytanie o istnienie ciągu drzew; natomiast wie o tym fakcie infinytysta. Wygląda na to, że finitysta musiałby zwrócić się do swojego kolegi z pytaniem: „Powiedz mi, co mogę wiedzieć, tzn. co mogę udowodnić. Nie pytam jednak o to, co jest prawdą, bo przecież inaczej rozumiemy pojęcie prawdy”. Przypomina to sytuację, w której fizyk zwraca się z prośbą o poradę do astrologa czy wróżki, gdyż dla finitysty zbiory nieskończone są tym, czym dla fizyka siły magiczne.

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden ciekawy fakt. Okazuje się, że aby udowodnić skończoną wersję twierdzenia Kruskala, musimy odwoływać się nie tylko do zbiorów nieskończonych przeliczalnych, ale musimy również odwołać się do zbiorów nieprzeliczalnych (por. [Si 87b]). Zatem nawet infinytysta, ale uznający jedynie istnienie zbiorów nieprzeliczalnych, nie byłby w stanie udowodnić tego twierdzenia, czyli nie byłby w stanie się dowiedzieć, czy w jego potencjalnie nieskończonym, zawierającym wszystkie możliwe ciągi drzew, świecie odpowiedni ciąg drzew istnieje, czy też nie. Nie wchodząc w szczegóły techniczne, warto w tym miejscu zauważyć, że dla udowodnienia twierdzenia Kruskala potrzebna jest teoria znacznie silniejsza niż arytmetyka Peano. Do udowodnienia tego twierdzenia nie wystarczy nawet silniejsza od arytmetyki Peano teoria, znana w literaturze jako ATR_o (por. [Si 85]). Jest to dość silna z punktu widzenia praktyki matematycznej teoria, pozwalająca udowodnić wiele „prawdziwych” twierdzeń matematycznych niedowodliwych w arytmetyce Peano.⁹ Warto tu podkreślić fakt, że dla udowodnienia twierdzenia Kruskala musimy odwoływać się do zbiorów nieprzeliczalnych, zatem nawet przy skrajnym rozumieniu zbioru potencjalnie nieskończonego po prostu jako zbioru przeliczalnego, paradoks nie da się uniknąć.¹⁰ Jest to również przyczynek do dyskusji na temat

⁹Mówiąc precyzyjnie, jest to jedno z rozszerzeń arytmetyki elementarnej. Rozszerzenia takie badane są w ramach tzw. matematyki odwrotnej (por. np. [D], [K], [M], [Si85], [Si87a], [Si87b], [Si88]). Program ten, zainicjowany przez Friedmana w r. 1974, ma na celu zbadanie, jak silne rozszerzenia arytmetyki liczb naturalnych (a co za tym idzie jak silne założenia teoriomnogościowe) są potrzebne dla dowodzenia twierdzeń z analizy, topologii czy innych działów matematyki.

¹⁰Powstaje tu pytanie, czy zbiór potencjalnie nieskończony może być nieprzeliczalny. Odpowiedź zdroworozsądkowa jest negatywna; być może jednak można sensownie mówić o nieprzeliczalnych zbiorach potencjalnie nieskończonych. Na pewno jednak nie będzie to zgodne z interpretacją zbioru potencjalnie nieskończonego jako powstającego ze skończonego „zbioru wyjściowego” przy pomocy skończonej ilości reguł generowania (taka interpretacja jest przyjęta np. w [H]).

zbiorów nieprzeliczalnych. Widzimy zatem, że dla dowodzenia twierdzeń na temat istnienia zbiorów nieskończonych musimy odwoływać się do faktów na temat zbiorów aktualnie nieskończonych, w tym również do zbiorów nieprzeliczalnych. Zaś z praktycznego punktu widzenia nawet uzyskanie wiedzy na temat zbiorów skończonych wymaga skorzystania z wiedzy na temat zbiorów nieskończonych. Zobaczmy, że zjawiska podobnego typu występują również w teorii mnogości.

III

W teorii mnogości niezależność pewnych zdań znana jest od dawna; przykładem może być tu pewnik wyboru czy hipoteza *continuum*. Dzięki metodzie forsingu, odkrytej przez Cohena udowodniono niezależność dużej ilości zdań teorii mnogości. Brak było jednak wyników dotyczących niezależności dotyczących „konkretnych” zdań matematycznych.¹¹ Niezależność znana była w przypadku zdań „abstrakcyjnych” lub metamatematycznych. Obecnie jednak znane są również przykłady „konkretnych” zdań niezależnych. Wyniki Friedmana [F 81] pokazują, że pewne twierdzenia dotyczące funkcji borelowskich określonych na kostce Hilberta o wartościach w odcinku $[0,1]$ nie dadzą się udowodnić bez silnych założeń dotyczących liczb Mahlo.¹² Co więcej, zdanie to jest niezależne również od aksjomatu konstruowalności $V = L$, którego przyjęcie usuwa niezależność w przypadku standardowych zdań niezależnych, jak pewnik wyboru czy hipoteza *continuum*. Widać więc, że rozstrzygnięcie pytań dotyczących pewnych własności funkcji borelowskich z kostki Hilberta w odcinek (a więc obiektów konkretnych) wymaga przyjęcia bardzo silnych założeń wykraczających poza ogólnie przyjęte w matematyce aksjomaty istnienia zbiorów. Co więcej, podobna sytuacja ma miejsce w przypadku pewnych zdań kombinatorycznych dotyczących obiektów skończonych (por. [F 86]). Dla udowodnienia tych zdań także konieczne jest przyjęcie założeń dotyczących liczb Mahlo. Oznacza to, że w kontekście „codziennych” problemów matematycznych pojawiają się nieusuwalne

¹¹Pojawia się tu znowu problem, co to są „konkretne zdania matematyczne”. Znowu, podobnie jak w przypadku zdań logiki, brak jest jasnego i oczywistego kryterium. Można chyba jednak zgodzić się, że twierdzenia dotyczące równań różniczkowych, procesów stochastycznych, różniczkowych etc. są bardziej „konkretne”, niż np. zdania dotyczące ultrafiltrów na dużych liczbach kardynalnych, choć nie wszyscy matematycy muszą podzielać tę opinię.

¹²Nie wchodząc w szczegóły techniczne, odnotujmy fakt, iż Friedman podał przykład zdania dającego się udowodnić przy założeniu, że dla każdego n istnieje liczba n -Mahlo, ale nie dającego się udowodnić przy założeniach słabszych. Liczby Mahlo (n -Mahlo) to duże liczby kardynalne, których istnienia nie da się udowodnić w teorii mnogości ZFC.

założenia teoriomnogościowe, dotyczące już nie tylko zbiorów nieskończonych aktualnie, zbiorów nieprzeliczalnych, ale bardzo dużych zbiorów nieskończonych, których istnienia w ZFC nie można udowodnić (jest ono niezależne od ZFC).

IV

Z przedstawionych powyżej przykładów twierdzeń wynika, że prawdy o świecie skończonym, czy potencjalnie nieskończonym, możemy dowiedzieć się jedynie odwołując się do wiedzy na temat świata nieskończonego. Nie jest to oczywiście dowód na to, że metody infinitystyczne w matematyce są konieczne; dowodzenie tego byłoby wyważaniem od dawna otwartych drzwi. Jednak świadomość, że dla poznania świata skończonego musimy odwoływać się do wiedzy na temat świata nieskończonego, bądź to z przyczyn logicznych, bądź technicznych (por. wyniki z rozdz. II) może ułatwić refleksję na temat struktury naszej wiedzy, czy na temat zobowiązań ontologicznych różnych teorii. Podobnie wyniki Friedmana mówiące nam, że na pewne proste pytania matematyczne może nie być prostych odpowiedzi, prowokują do postawienia (po raz kolejny) problemu prawdy w matematyce i metod jej poszukiwania. Wyniki dotyczące zależności między nieskończonością potencjalną i aktualną (jeżeli przyjmujemy taką interpretację) mogą stanowić drobny przyczynek do dyskusji na temat finityzmu, czy polemiki ze stanowiskiem odrzucającym zbiory nieprzeliczalne. Jest to wreszcie również pewien dowód na to, że sama matematyka dostarcza wciąż wielu nowych i ciekawych pytań filozoficznych.

Bibliografia

- [B–F] Barwise J., Feferman S., *Model–Theoretic Logics*, Springer–Verlag 1985.
- [Bo] Bolzano B., *Paradoksy nieskończoności*, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Murawski R. [red.], Poznań 1986.
- [C] Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Zermelo E. [red.], Berlin 1932 (reprint: Springer–Verlag, 1980).
- [D] Drake F.R., *On the Foundations of Mathematics in 1987*, w: *Logic Colloquium '87*, Ebbinghaus H.D. [red.], Elsevier Science Publishers B.V. (North–Holland) 1989.
- [F 81] Friedman H., *On the Necessary Use of Abstract Set Theory*, „Advances in Mathematics” 41 (1981), 209–280.
- [F 86] Friedman H., *Necessary Uses of Abstract Set Theory in Finite Mathematics*, „Advances in Mathematics” 60 (1986), 92–122.

- [H] Hailperin T., *Herbrand Semantics, the Potential Infinite, and Ontology-Free Logic*, „History and Philosophy of Logic”, 13 (1992), 69–90.
- [K] Kossak R., *Odwrotna matematyka — częściowa realizacja programu Hilberta*, preprint IMPAN 1991.
- [L] Lolli G., *Foundational Problems from Computation Theory*, „Synthese” 62 (1985), 274–288.
- [M] Murawski R., *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne” 30 (1993), 51–72.
- [R] Robinson A., *Formalism* 64, w: *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1964 International Congress*, Bar-Hillel Y. [red.], North-Holland 1965.
- [Sh 85] Shapiro S., *Second-Order Languages and Mathematical Practice*, „Journal of Symbolic Logic” 50 (1985), 714–742.
- [Sh 91] Shapiro S., *Foundations without Foundationalism*, Clarendon Press 1991.
- [Si 85] Simpson S.G., *Unprovability of Certain Combinatorial Properties of Finite Trees*, w: *Harvey Friedman’s Research on the Foundations of Mathematics*, Harrington L.A. i inni [red.], Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland) 1987.
- [Si 87a] Simpson S.G., *Subsystems of Z_2 and Reverse Mathematics*, w: *Takeuti G. „Proof Theory”*, North-Holland 1987.
- [Si 87b] Simpson S.G., *Unprovable Theorems and Fast-Growing Functions*, „Contemporary Mathematics” 65 (1987), S.G. Simpson [red.], 359–394.
- [Si 88] Simpson S.G., *Partial Realizations of Hilbert’s Program*, „Journal of Symbolic Logic” 53 (1988), 349–363.
- [T] Takeuti G., *Proof Theory and Set Theory*, „Synthese” 62 (1985), 255–263.