RECENZJE

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XVI / 1994, s. 114–121*

Ewa WOJTOWICZ

THARP, *MIT I MATEMATYKA*

- Leslie H. Tharp, *Mit i matematyka*, „Synthese", 81 (1989) i 88 (1991).

We współczesnej filozofii matematyki dominują w dalszym ciągu trzy kierunki klasyczne, powstałe pod koniec XIX wieku i w pierwszych trzydziestu latach XX w.: wiązany z platonizmem logicyzm, intuicjonizm i formalizm. Od lat sześćdziesiątych naszego wieku zaczęły pojawiać się alternatywne teorie, których twórcy starali się uwzględniać w szerszym zakresie rolę podmiotu poznającego — konkretnego matematyka. Jedną z pierwszych była koncepcja dowodów i kontrprzykładów Imre Lakatosa, powstała pod wpływem filozofii Karla Poppera. Zgodnie z nią matematyka jest omylna, a nie pewna, podobnie jak nauki przyrodnicze. Nie jest gromadzeniem niepodważalnie ustalonych twierdzeń, ale ciągłym ulepszaniem zgadywań metodą spekulacji i kontrprzykładów. Inny uczony Raymond L. Wilder zaproponował z kolei ujęcie matematyki jako systemu kulturowego. Dla podparcia swoich tez podał wiele przykładów z historii matematyki. Wskazał między innymi na zjawisko odkryć równoczesnych, świadczące, jego zdaniem, o istnieniu sił kulturowych wymaczających problemy, które winny być rozwiązane. Zbliżone do tego jest stanowisko Davida Bloora, proponującego socjologiczne wyjaśnienie fenomenu nauk, a w szczególności matematyki. W tym artykule spróbujemy krótko przedstawić i poddać krytyce inną teorię — konceptualistyczną filozofię matematyki naszkicowaną przez Lesliego Tharpa na przełomie siedemdziesiątych i osiemdziesiątych lat naszego wieku.

Leslie H. Tharp urodził się w 1940 roku. Dzieciństwo i wczesną młodość spędził na małej farmie w Północnej Dakocie. Korespondencyjnie zaliczył kursy matematyki i innych nauk ścisłych w zakresie szkoły średniej. W 1958 roku rozpoczął studia w Massachusetts Institute of Technology,

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

które ukoronował doktoratem uzyskanym w 1965 roku za pracę *Konstruowalność w niepredykatywnej teorii zbiorów.* Następnie pracował w MIT, Rockefeller University i University of Illinois. Zmarł nagle w 1981 roku. Zainteresowania naukowe Tharpa ewoluowały. Rozpoczął od badań z zakresu teorii mnogości, następnie zajmował się problemami dotyczącymi przedmiotów abstrakcyjnych i kwantyfikacji, rozważał naturę logiki, analizował pojęcia absolutnej dowodliwości, nazywania, konieczności i aprioryczności. Od roku 1975 poświęcił się pracy w dziedzinie filozofii matematyki. Zamierzał opracować szczegółowo konceptualistyczną filozofię matematyki, która wyjaśniałaby obiektywność matematyki bez postulowania nieskończonej dziedziny przedmiotów matematycznych. Swoje poglądy na matematykę naszkicował w pracy *Mit i matematyka*, którą ukończył wiosną 1976 roku. Ciekaw reakcji, dał ją do przeczytania wielu filozofom. Nakłoniony przez ich uwagi i komentarze, postanowił wnieść do niej poprawki i uzupełnienia. Skutkiem tego praca rozrosła się do takich rozmiarów, że zamierzał ją opublikować w trzech oddzielnych częściach. Część I *Mitu i matematyki* jest rozszerzoną i zmienioną wersją pierwotnej pracy. Prezentuje ona zasadnicze tezy jego konceptualistycznej filozofii matematyki. Jej ostateczna postać pochodzi z 1977 roku. W części II zajął się rozważaniem natury pojęć matematycznych i innych przedmiotów abstrakcyjnych oraz *quasi*–empirycznych źródeł wiedzy. Pozostawiona wersja z roku 1980 zapewne nie miała być ostateczna, gdyż posiada wyraźnie roboczy charakter, jest dość chaotyczna i w wielu miejscach niejasna. Z tego czasu pochodzi też szkic części III, której nie zdążył już napisać. Część I *Mitu i matematyki* została opublikowana po raz pierwszy w 81 tomie czasopisma „Synthese" w 1989 r., tomie pamiątkowym, poświęconym Lesliemu Tharpowi. W tomie tym zamieszczono również wprowadzające, polemiczne artykuły Hao Wanga — *Tharp i logika konceptualistyczna* i Charlesa S. Chihary — *Tharpa 'Mit i matematyka'* oraz wcześniej nie drukowaną pracę Tharpa *Trzy twierdzenia matematyki.* Połowa części II *Mitu i matematyki* została wydrukowana w 88 tomie „Synthese" w 1991 roku. W tomie rym zaprezentowano teksty referatów, jakie zostały wygłoszone w czasie sesji *Nowe kierunki w filozofii matematyki*, która odbyła się w lutym 1990 roku w Nowym Orleanie. Zamieszczono w nim również fragment pracy Tharpa, by zapoznać z jego poglądami szersze grono czytelników i uświadomić, jak zagadnienia, którymi zajmował się ponad dziesięć lat temu, są bliskie aktualnym dyskusjom w filozofii matematyki.

* * *

We wstępie do części I *Mitu i matematyki* Leslie Tharp wyraźnie określa cel swojej pracy. Jest nim zaprezentowanie konceptualistycznej filozofii matematyki — kontrpropozycji w stosunku do bardzo rozpowszechnionego wśród matematyków platonizmu, to znaczy poglądu, że istnieje obiektywny, idealny świat przedmiotów matematycznych, do którego docieramy za pomocą intuicji. Filozofia ta ma uczynić mniej tajemniczym posiadanie przez nas wiedzy matematycznej. Istotne dla niej jest dostrzeżenie podobieństw pomiędzy matematyką i fikcją, mimo że wydają się one zupełnie odmienne — na pierwszy rzut oka uderza precyzja matematyki i nieokreśloność fikcji.

Dla zilustrowania swoich poglądów na fikcję Tharp proponuje rozważyć następującą krótką historię: „jedynymi ludźmi w naszej historii są Gertruda i Hamlet. Gertruda jest królową, Hamlet jest księciem, a Gertruda jest matką Hamleta". Z podanych warunków i znaczenia pojęć „książę", „królowa", „matka" wynikają rozmaite konsekwencje prawdziwe w tej historii — na przykład, że żadni książęta nie są królowymi, Gertruda i Hamlet są różni, Hamlet nie jest matką Gertrudy. Do pierwszej z tych konsekwencji dochodzimy nie używając nawet podanych warunków, lecz opierając się jedynie na poczuciu naturalnego znaczenia pojęć „książę", „królowa", tego, że książęta są mężczyznami, królowe — kobietami, mężczyźni nie są kobietami. Tharp zauważa, że chociaż może się wydawać, iż w fikcji, inaczej niż w matematyce, dominują warunki arbitralne, a wnioskowania są przeprowadzane bardziej lub mniej świadomie, to jeśli użyte pojęcia są wystarczająco precyzyjne, to mimo że warunki są arbitralne, ich konsekwencje są jednoznacznie określone. W różnych historiach obowiązują różne prawdy, na przykład w naszej historii prawdziwe jest zdanie „istnieje tylko jeden książę", choć nie jest ono faktycznie prawdziwe. Jednakże pod prawdą w historii kryje się faktyczna prawda mówiąca, że w każdym świecie, który spełnia warunki naszej historii, istnieje tylko jeden książę.

Według Tharpa w matematyce szczególnie ważne są pojęcia o naturze kombinatorycznej. Ich przykłady stanowią:

(1) x jest permutacją ciągu (Sokrates, Platon, Arystoteles),

(2) x jest wartością logiczną wyrażenia $(P \to Q) \wedge (P \to \sim Q)$, gdy P i Q przypisano wartości logiczne y i z,

(3) x jest wyliczeniem maszyny Turinga y przy danej wejściowej z.

Pojęcia te są absolutnie precyzyjne, odnoszą się do przedmiotów dyskretnych, którymi operuje się w ściśle określony sposób. W analizie i innych działach matematyki używa się analogonów pojęć kombinatorycznych w dziedzinie nieskończonej, zwanych przez Tharpa pojęciami *quasi*–kombinatorycznymi. Dla pzykładu rozważmy funkcje przyporządkowujące każdemu elementowi ciągu $1, 2, 3, \ldots, n$ jakiś element tego ciągu. Jest n^n takich funkcji i każdą otrzymujemy przez n niezależnych ustaleń. Możemy przejść do przypadku nieskończonego i rozpatrywać funkcje przypisujące każdej liczbie naturalnej liczbę naturalną. Mamy wtedy do czynienia z pojęciem *quasi*–kombinatorycznym. Zdaniem Tharpa, współczesna matematyka opiera się w przeważającej części na pojęciach o naturze kombinatorycznej.

Na przykładzie arytmetyki liczb naturalnych Tharp usiłuje pokazać, że pojęcia matematyki wyrastają z pojęć potocznych. W tym celu przytacza historyjkę o Dawidzie bawiącym się klockami. Jedne z nich są opatrzone znakiem Z, inne znakiem I. Dawid może spinać klocki ze sobą. Z–klocki oraz obiekty złożone z Z–klocka i następującej po nim sekwencji I–klocków nazywa się pociągami i nie rozważa żadnych innych obiektów, jakie Dawid może zbudować. Posiada on jedynie niewielką skończoną liczbę klocków. Można jednak pominąć Dawida, nie przyjąć żadnych ograniczeń na liczbę klocków i założyć, że mogą być budowane pociągi dowolnej skończonej długości. W oparciu o historię o fikcyjnych pociągach określa się następujące pojęcia kombinatoryczne:

Tx: x jest pociągiem (o dowolnej skończonej długości),

Zx: x jest Z–klockiem,

Sxy: y jest przystający do pociągu, który powstaje przez dodanie I–klocka do x,

$Axyz$: z jest przystający do pociągu, który powstaje przez dodanie tylu klocków, ile ma y, do końca x,

$Mxyz$: z jest przystający do pociągu, który powstaje przez wzięcie Z–klocka i dodanie do niego dla każdego I–klocka y, tylu I–klocków, ile posiada x.

Pojęcia T, Z, S, A, M określają odpowiednio uniwersum, element zerowy, następnik, dodawanie, mnożenie. Zdaniem Tharpa, z pojęć tych wynikają aksjomaty arytmetyki Peano, narzucając się jako prawdziwe. I tak naturalną konsekwencją zatożenia, że można budować dowolnie długie pociągi jest aksjomat $\forall x\ \exists y\ Sxy$. Musi się również przyjąć aksjomat $\forall y(Zy \to \forall x\ \sim Sxy)$, gdyż jeśli doda się I–klocek do dowolnego pociągu, to nie otrzyma się Z–pociągu. Pozostałe aksjomaty arytmetyki Peano wynikają równie jasno z przyjętych pojęć. Tharp konkluduje, że w rym przypadku nie trzeba odwoływać się do intuicji żadnych tajemniczych obiektów matematycznych, gdyż znane z życia, potoczne pojęcia zmuszają nas do zaakceptowania aksjomatów arytmetyki.

Podobnie jest w przypadku analizy (teorii liczb i zbiorów liczb). Do pojęć arytmetycznych są w niej dodane nowe pojęcia: „x jest zbiorem pociągów" i „$x \in y$". Pojęcie zbioru jest naturalną ekstrapolacją pojęcia „x jest stosem przedmiotów (określonego rodzaju)", a „$x \in y$" — pojęcia przedmiotu x ulokowanego w stosie y. Uniwersum analizy jest określone przez pojęcie „x jest pociągiem lub x jest stosem pociągów". Dla dowolnego pojęcia Fx zdefiniowanego dla pociągów jesteśmy zmuszeni zaakceptować aksjomat „istnieje zbiór zawierający dokładnie te pociągi x, dla których zachodzi Φx". Tak samo jest z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości Zermelo–Fraenkla.

Kilka uwag poświęcił Tharp geometrii, której pojęcia nie są tak jasne jak pojęcia arytmetyki. W przypadku niesformalizowanej geometrii, która doprowadziła do aksjomatyzacji Euklidesa, winniśmy wyobrazić sobie przez analogię do Dawida bawiącego się klockami w przypadku arytmetyki, Dawida bawiącego się prostymi prętami i linkami. Pojęcie prostego prętu nie jest tak jasne jak pojęcie pociągu, pojęcie „x jest proste" odwołuje się do złożonego fizycznego zjawiska, a kryteria bycia prostym są mgliste. Geometria powstała jako opis zjawisk fizycznych i można ją uważać za naukę fizykalną — teorię dróg promieni świetlnych. Odkrycia fizyki mogą prowadzić do wysubtelnienia pojęć pierwotnych geometrii i obalenia niektórych jej prawd, jak było z twierdzeniem, że suma kątów trójkąta wynosi 180. Można też odseparować geometrię od zjawisk fizycznych i traktować ją wyłącznie jako strukturę abstrakcyjną. Jeśli postulat o równoległych jest zgodny z czyjąś intuicją, to można go przyjąć i uzyska się spójną teorię — geometrię Euklidesa. Nie jesteśmy jednak zmuszeni do zaakceptowania postulatu o równoległych w oparciu o intuicyjne pojęcia geometrii, tak jak jesteśmy zmuszeni do zaakceptowania aksjomatów arytmetyki. Zostało to już dostrzeżone w starożytności. Obecnie wiadomo, że z naturalną intuicją mogą być zgodne różne teorie — zarówno geometria euklidesowa, jak i geometrie nieeuklidesowe. Tharp wskazuje, że przykład geometrii uświadamia, iż nie we wszystkich teoriach matematycznych aksjomaty wynikają w tak oczywisty sposób z pojęć, jak w przypadku arytmetyki.

W części I *Mitu i matematyki* Leslie Tharp broni poglądu, że wiedza matematyczna pochodzi z wywnioskowywania aksjomatów z pewnych pojęć i zastosowania logiki do dedukowania konsekwencji aksjomatów. Zdecydowanie przeciwstawia się platonizmowi i sądzi, że wiedza matematyczna nie może pochodzić z odniesienia do indywidualnych przedmiotów, bo gdyby nawet istniała odpowiednia dziedzina przedmiotów, to nie moglibyśmy posiadać wiedzy o każdym indywiduum przy swoich ograniczonych zdolnościach. Na przykład standardowe aksjomaty arytmetyki Peano nie zostały wyprowadzone indukcyjnie czy też za pomocą innej procedury empirycznej metodologii. Aby poznać twierdzenia o liczbach naturalnych, wystarczy opanować kilka podstawowych pojęć, wywnioskować aksjomaty i przeprowadzić odpowiednie dedukcje. Niepotrzebna jest specjalna wiedza o każdej liczbie czy też ogólna teoria bytu matematycznego. Pojęcia są ujmowane dzięki rozumieniu pewnych kryteriów („jest Z–blokiem", „jest przystające do"), które mogą być stosowane i sprawzone w konkretnych przypadkach i jasne dla przypadków, które nie powstaną oraz dla przypadków, które nie mogą powstać ze względu na fizyczną niemożliwość. Tharp podkreśla, że jego pogląd na matematykę nie jest formalizmem, gdyż pojęcia matematyczne są interpretowalne, a niektóre z nich posiadają realne istnienie. Uprawiając matematykę działamy pod pewnym przymusem. Nasze wybory pojęć nie są zatem zupełnie dowolne, a kiedy wybierzemy już początkowe pojęcia, nie mamy kontroli nad konsekwencjami. Ograniczenia wyboru pojęć i niekontrolowane jego konsekwencje wskazują na obiektywność matematyki.

W części II *Mitu i matematyki* Tharp znacznie modyfikuje swoje poglądy na sposób kształtowania się wiedzy matematycznej, w szczególności aksjomatyzacji teorii niesformalizowanych. Zauważa, że w wielu teoriach matematycznych aksjomaty są w istocie definicjami *implicite* podstawowych dla tych teorii pojęć. Na przykład aksjomat arytmetyki liczb naturalnych „każda liczba ma następnik", jest w znacznym stopniu definicją *implicite* liczby naturalnej. Aksjomat często bywa zasugerowany jako naturalna infinitystyczna analogia pewnych rzeczywistych faktów. Jest on szczegółowo analizowany, bada się, czy przyjęcie go posiada pożądane konsekwencje, na przykład, czy rozstrzyga wcześniej otwarte problemy, czy harmonizuje z teorią niesformalizowaną i objaśnia ją. Taka procedura *quasi*–empiryczna doprowadza do przyjęcia aksjomatu, jego modyfikacji lub odrzucenia. Możliwe jest zdefiniowanie *implicite* pojęć teorii matematycznej przez stopniowe przyjmowanie coraz większej liczby aksjomatów, co jest równoznaczne z ustaleniem coraz większej liczby warunków do spełnienia dla pojęć. Pojęcia są oczywiście tylko częściowo definiowane w ten sposób. Proces wprowadzania pojęć i aksjomatyzacji teorii jest procedurą działającą w dwóch kierunkach — intuicyjne pojęcia wymuszają pewne aksjomaty, a z kolei aksjomaty w dużym stopniu dookreślają i modyfikują pojęcia.

Chociaż logicy odnieśli sukcesy w formalizowaniu teorii matematycznych i w badaniu tych systemów formalnych w sposób matematyczny, choć posiadamy teorie języków formalnych, formalnej dedukcji i modeli matematycznych dla języków formalnych, nie wiemy prawie nic o procesach, dzięki którym docieramy do pojęć i aksjomatów teorii matematycznych. Tharp stoi na stanowisku psychologistycznym i uważa, że istotną rolę w konstytuowaniu pojęć odgrywają idealizacje i ekstrapolacje. Na przykład pojęcie zbioru jest ściśle związane z naszymi zdolnościami postrzegania kilku przedmiotów jako jednej całości, łączenia wielu przedmiotów, pomijania cech nieistotnych. Zdaniem Tharpa, problem docierania do pojęć i aksjomatów matematyki zostanie w przyszłości zgłębiony za pomocą naukowych badań zjawisk mentalnych.

Według platonistów, pojęcia matematyczne odnoszą się do idealnych przedmiotów matematycznych, zaś predykaty — do relacji pomiędzy tymi przedmiotami. Tharp nie zgadza się z tą tezą. Jego zdaniem, jeśli przedmiot abstrakcyjny jest w jakiś sposób skonstruowany z rzeczywistych składników lub posiada rzeczywiste reprezentanty, to odniesienie do niego jest możliwe za pomocą odniesienia do jego jednego lub więcej rzeczywistych przedstawicieli. Ponieważ trudno utrzymywać, że wszystkie przedmiary matematyczne posiadają rzeczywiste reprezentanty, odniesienie do wielu z nich jest wysoce problematyczne. Tharp uważa, że predykaty nie odnoszą się do relacji. Użycie predykatu w twierdzeniu jest bliższe użyciu instrukcji dla wyrażenia procedury testowania niż użyciu terminu dla wyznaczenia przedmiotu.

Dla uniknięcia konieczności odniesienia do przedmiotów matematycznych, Tharp proponuje modalną interpretację kwantyfikacji. Kwantyfikatory $\forall x$ i $\exists x$ są rozumiane odpowiednio jako „dla każdego możliwego x" i „mogłoby istnieć takie x". Modalność nie wyklucza faktycznego istnienia przedmiotów, spełniających pewne zdania z kwantyfikatorami. Tharp ilustruje swój pogląd przykładem. Jeśli powiemy: „okrągłe zatyczki nie mogą pasować do kwadratowych otworów", to jest to stwierdzenie modalne równoważne zdaniom: „żadne możliwe okrągłe zatyczki nie mogą pasować do kwadratowych otworów" oraz „jest fałszem, że mogłaby istnieć okrągła zatyczka pasująca do kwadratowego otworu". Pierwsze z nich brzmi jak twierdzenie o pewnych przedmiotach abstrakcyjnych — możliwych zatyczkach, a drugie — o rzeczywistych (fizycznych) zatyczkach, o ich możliwym istnieniu. Wszystkie trzy zdania należy jednak rozumieć jako twierdzenia o pojęciach. Gdybyśmy traktowali je jako mówiące o zwyczajnych zatyczkach, to zawęzilibyśmy ich treść, jeśli zaś jako mówiące o przedmiotach abstrakcyjnych, to prowadziłoby to do trudnych problemów metafizycznych i epistemologicznych, a nie byłoby użyteczne w czymkolwiek. Podejście modalne nie zmusza do przyjęcia nowych rodzajów przedmiotów; modalne twierdzenia matematyki pierwotnie dotyczą pojęć, a rzeczywistych przedmiotów w pośrednim sensie, gdyż pojęcia mogą być stosowane do rzeczywistych przedmiotów.

Akceptacja przedmiotów abstrakcyjnych jest zazwyczaj utożsamiana z platonizmem. Tharp utrzymuje, że można przyjmować przedmiary abstrakcyjne, przynajmniej w małej skończonej ilości, bez obciążania się epistemologicznymi i ontologicznymi problemami platonizmu. Przedmioty abstrakcyjne, które rzeczywiście istnieją, mają podstawę w fizycznych i mentalnych składnikach i odnosimy się do nich poprzez te składniki, dlatego też nie ma potrzeby postulowania tajemniczej intuicji matematycznej. Szczególnie ważnym rodzajem przedmiotów abstrakcyjnych w matematyce są te, które powstają w wyniku przejścia od znaku do typu. Przykładem jest kształt „#", gdzie przeszliśmy od znaku „#" do przedmiotu abstrakcyjnego — jego kształtu. Ogólnie, takie przedmiary abstrakcyjne wyrastają ze znaków specyficznego rodzaju i relacji równoważności. Na przykład znaki mogą być dane przez predykat jednoargumentowy „x jest identyczne z jednym z napisów „#", „$" lub „%"", a relacja równoważności — przez predykat dwuargumentowy „x ma ten sam kształt co y". Również inne znane przedmioty abstrakcyjne, jak kolory, wysokości, ciężary, kierunki, wyrastają z przejścia od znaku do typu. W przypadku koloru znaki są fizycznymi powierzchniami, a relacją podobieństwa jest „x ma taki sam kolor jak y". Każdy znak reprezentuje jakiś przedmiot abstrakcyjny, zwany typem. Mnie się zdarzyć, że dwa znaki reprezentują ten sam typ ze względu na jedną relację równoważności i różne typy ze względu na inną, na przykład ten sam kolor i różne kształty. Rodzaj znaków i relacja podobieństwa są pojęciami, a pojęcia w pewnym sensie są konstruowane z fizycznych i mentalnych składników i dlatego też za takie można uważać przedmioty abstrakcyjne powstałe w wyniku przejścia od znaku do typu.

Tharp przyznaje, że chociaż przedmioty abstrakcyjne powstałe w wyniku przejścia od znaku do typu są przydatne w wielu kontekstach matematycznych, nie wyjaśniają jednak, jak są możliwe nieskończone systemy matematyczne. Na przykład liczby nie powstają przez indywidualne konstruowanie typów ze znakowych pojęć, gdyż po prostu nie ma tylu pojęć. Dla mówienia o nieskończoności konieczne jest użycie kilku pojęć ogólnych oraz twierdzeń modalnych. Tharp podkreśla, że matematyka ma podstawę w zjawiskach mentalnych i wierzy, że ich fizjologiczne wyjaśnienia są w zasadzie możliwe. Odrzuca realizm platoński, zakładający dziedzinę niezależnie istniejących przedmiotów matematycznych, ale zauważa, że w pewnym sensie jest realistą, gdyż sądzi, że twierdzenia matematyki wyrażają fakty o rzeczywistych pojęciach, które skonstruowaliśmy.

* * *

Leslie Tharp pracę, w której przedstawia swe konceptualistyczne poglądy na matematykę, tytułuje *Mit i matematyka*. Można pytać dlaczego. W części I sporo miejsca poświęca porównaniu matematyki z fikcją, wyraża przekonanie, że szczególnie istotne dla zarysowania się jego koncepcji było dostrzeżenie analogii pomiędzy matematyką a mitem i, jak pisze, inną fikcją. Jednak stopniowo zmienia swe poglądy i w części II nie zajmuje się tym zagadnieniem prawie wcale, choć tytuł pracy pozostaje nie zmieniony. Hao Wang w artykule *Tharp i logika konceptualistyczna* czyni uwagi do *Mitu i matematyki*. Przede wszystkim nie uważa za trafne i wystarczająco uzasadnione porównania matematyki z fikcją i zwraca uwagę na fakt, że Tharp miesza pojęcia mitu i fikcji, używa ich zamiennie, mit nazywa rodzajem fikcji, a konieczne jest bardziej ostrożne podejście, gdyż jedynie w specyficznym znaczeniu mit to tyle co fikcja. Mit w znaczeniu podstawowym to próba opisu, przybliżenia czegoś, co istnieje lub w istnienie czego się wierzy, a więc nie rodzaj fikcji. Mitowi może odpowiadać coś w rzeczywistości, a fikcji — nie, dlatego też mit nie jest rodzajem fikcji i tym bardziej mit i fikcja to nie to samo. Sam Tharp przyznaje, że matematyka bada również prawdy o rzeczywiście istniejących przedmiotach abstrakcyjnych i zależnościach zachodzących pomiędzy nimi, a więc bliższa jest mitowi niż fikcji. Zestawienie matematyki z mitem nie budzi sprzeciwu platonisty, gdyż dla niego matematyka jest rodzajem mitu, próbą opisania obiektywnego świata przedmiotów matematycznych. Pisząc pierwszą część pracy dotyczącej konceptualistycznej filozofii matematyki i będąc przekonany o słuszności twierdzenia o bliskości matematyki i fikcji, Tharp nie tytułuje jej jednak *Fikcja i matematyka*, lecz *Mit i matematyka*. Być może czyni tak jedynie ze względów stylistycznych, termin „mit” brzmi bardziej intrygująco niż „fikcja”, nie da się jednak wykluczyć, że już wtedy niejasno uświadamia sobie nieadekwatność porównania matematyki z fikcją i większych zbieżności z mitem. Można to uważać za wynik nieuświadomionych skłonności Tharpa do platońskiej interpretacji matematyki lub też więcej — za niemożność uwolnienia się od tajemniczego, obiektywnego świata przedmiotów matematycznych, nawet w przypadku myśliciela usilnie poszukującego prostszych rozwiązań.

Przejdźmy jednak od spekulacji do konkretnej polemiki z niektórymi z tez Tharpa i prób ich interpretacji. W artykule wprowadzającym do *Mitu i matematyki* Charles Chihara zauważa, że zaprezentowane przez Tharpa, zwłaszcza w pierwszej części pracy, sposoby wywodzenia pojęć matematycznych z pojęć potocznych nie są przekonywające, w szczególności chodzi mu o pojęcie zbioru. Zdaniem Tharpa, pojęcie zbioru jest naturalną ekstrapolacją pojęcia przedmiotu umieszczonego w stosie. Budzi to wątpliwości Chihary, gdyż stosy i zbiory istotnie się różnią. Stos nie może być umieszczony w innym stosie, podczas gdy zbiór może być elementem innego zbioru; jeden kamień nie tworzy stosu, lecz może stanowić całą zawartość zbioru; nie może być stosu bez przedmiotów, ale, według standardowej teorii mnogości, istnieje zbiór bez elementów; stosy mogą być zburzone bez naruszenia czegokolwiek wewnątrz nich, a zbiory nie mogą — jeśli usuniemy stos kamieni z drogi i wrzucimy je do rowu, to stos kamieni dłużej nie istnieje, ale przez to nie zburzymy zbioru kamieni.

Chihara zwraca uwagę na fakt, że Tharp proponuje modalną interpretację matematyki ze względu na to, że nie wymaga ona zakładania istnienia jakichkolwiek zbiorów, a mimo to przyjmuje istnienie małej ilości przedmiotów matematycznych. Zdaniem Chihary, przekonania tego nie uzasadnia w należyty sposób. Z drugiej strony zwolennicy ontologii możliwych światów, sądzący, że podejście modalne wymaga postulowania bytów abstrakcyjnych — możliwych światów, zarzucają Tharpowi, że modalny pogląd na matematykę faktycznie nie eliminuje problemu, jak poznajemy prawdy matematyczne, ale jedynie przesuwa go do innej dziedziny. Hilary Putnam zauważa, że modalność, o jakiej mówi Tharp w swej konceptualistycznej analizie matematyki, ma charakter wyraźnie matematyczny i wysuwa zarzut błędnego koła sprowadzający się do tego, że matematyka jest interpretowana za pomocą pojęcia matematycznego, pojęcia, które zakłada matematykę.

Innym zagadnieniem domagającym się wyjaśnienia w koncepcji Tharpa jest problem intersubiektywności. Czy umysły różnych ludzi konstruują takie same przedmioty abstrakcyjne? Zakładając nawet, że wszystkie umysły są jednakowo sprawne, nie można twierdzić, że z fizycznych i mentalnych elementów zbudują takie same przedmioty matematyczne. Przy uwzględnieniu zróżnicowania sprawności i zdolności twórczych umysłów, trudność jeszcze się pogłębia. Musielibyśmy się zgodzić, że niektóre przedmioty abstrakcyjne zarazem istnieją i nie istnieją — istnieją ze względu na pewne umysły — te, przez które zostały skonstruowane i nie istnieją ze względu na inne — te, które ich nie skonstruowały. Nawet przy słabszym rozumieniu intersubiektywności, wymagającym jedynie możliwości skonstruowania przez inne umysły przedmiotu zbudowanego przez jakiś umysł, trudność pozostaje.

Szczególnie istotną rolę w matematyce przypisuje Tharp pojęciom powstającym w wyniku przejścia od znaku do typu, ale przyznaje, że nie wyjaśniają one nieskończoności i uważa, że do tego celu potrzebne są pojęcia ogólne. Hao Wang chyba słusznie spostrzega, że Tharpowi nie udaje się pokazać, jak czynią one możliwymi nieskończone systemy matematyczne. Istnienie pojęć wyrastających z przejścia od znaku do typu łatwo objaśnić bez odwoływania się do idealnego świata obiektywnych przedmiotów matematycznych. Jak zostało powiedziane, one jednak nie wystarczają w matematyce, potrzeba pojęć ogólnych, których powstanie trudniej objaśnić bez odwoływania się do świata idealnego, a Tharp takiego wyjaśnienia nie daje, wyraża jedynie nadzieję, że uczyni to w przyszłości fizjologia i inne nauki, sądzi, że fizjologiczne badania kodyfikacji pojęć w mózgu uświadomią nam, jak dotarliśmy do pojęć i aksjomatów matematyki i „nienaukowe” postulowanie platońskiej intuicji matematycznej stanie się niepotrzebne. Tharp sprawia wrażenie scjentysty, najwyraźniej zapomina, że pewność nauk przyrodniczych jest fikcją, że opierają się one na nie uzasadnionych przesłankach, równie tajemniczych jak intuicja matematyczna, a poza tym zakładają matematykę i dlatego też fizjologicznej eksplikacji matematyki grozi *petitio principi.*

Omawiana konceptualistyczna filozofia matematyki jest niewątpliwie godną uwagi głównie ze względu na ambitne cele przyświecające jej autorowi — stworzenia wizji matematyki bliższej człowiekowi, uwzględnienia roli podmiotu poznającego, wyjaśnienia sposobu nabywania wiedzy matematycznej bez odwoływania się do tajemniczego pojęcia intuicji. Zamierzenie Tharpa poniekąd się udało, przedstawił filozofię matematyki alternatywną w stosunku do kierunków klasycznych, a w szczególności platonizmu, z którym głównie polemizował. Podane uwagi wskazują jednak, z jak wieloma trudnościami boryka się taka koncepcja, budzi ona nie mniej pytań i wątpliwości niż platonizm, korzysta z równie niepewnych założeń, odrzuca co prawda intuicję docierającą do obiektywnego świata przedmiotów matematycznych, ale na jej miejsce wprowadza wiarę, wiarę (*sic!*) w moc nauki pozytywnej. Świadczy to o trudności lub nawet o niemożności usunięcia tajemnicy, stworzenia nie opierającej się na dogmatach filozofii matematyki i innych nauk, które ją zakładają, a tym bardziej całościowej wizji świata.

Ewa Wojtowicz