ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XIV / 1992, s. 51–73*

Wiesław WÓJCIK

NOWE PRĄDY W MATEMATYCE XIX WIEKU

1. PRÓBA SCHARAKTERYZOWANIA NOWOŻYTNEGO MODELU NAUKOWOŚCI

Istnieje kilka podstawowych cech, którymi powinien charakteryzować się umysł ludzki, aby nauka mogła stać się jego wytworem. A. N. Whitehead wspomina o trzech takich cechach, które, według niego, nauka nowożytna przejęła w dużym stopniu od okresów poprzednich[1].

Pierwszą z nich jest instynktowna wiara w porządek przyrody. Wbrew najbardziej sceptycznym rozważaniom negującym podstawy takiej wiary, musi ona trwać, aby nauka mogła istnieć.

Drugą z tych cech jest wiara w żelazną logikę konieczności z jaką przebiegają zdarzenia, a co się bezpośrednio z tym wiąże, wiara w możliwość ujęcia zależności obserwowanych faktów w formę ogólnych praw i zasad. Kiedy więc analizujemy pewne szczegółowe zdarzenia i wiążemy je ze zdarzeniami je poprzedzającymi, to muszą ujawnić się prawidła ogólne ujmujące tę konkretną sytuację.

Trzecią cechą, a zarazem drugim biegunem charakteryzującym mentalność naukową, jest świadomość tego, że warto bezpośrednio obserwować dane fakty, gdyż nie wszystkie one muszą wynikać z ogólnych i uprzednio przyjętych reguł. Wręcz mogą być z nimi w sprzeczności. Ta wiara w konieczność obserwowania „nieuniknionych upartych faktów”, a więc wiara w to, że w przyrodzie zawsze możemy zaobserwować fakty przeczące istniejącym teoriom naukowym, jest równie niezbędna jak instynktowna wiara w racjonalność przyrody. Whitehead uważa, że tak ścisły „związek” namiętnego zainteresowania faktami szczegółowymi i absolutnego oddania abstrakcyj-

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] A. N. Whitehead, *Nauka i świat współczesny*, W–wa 1988, 10–28.

nym uogólnieniom przesądza o niepowtarzalności naszego obecnego społeczeństwa[2].

Nauka nowożytna w szczególny sposób tym się charakteryzuje, że wykuwa swoje prawa będąc ciągłym arbitrem pomiędzy upartymi faktami i śmiałymi uogólnieniami. Istotne jest w gruncie rzeczy to, że epoka nowożytna umiała w odpowiedni sposób wykorzystać to, co wypracowały epoki poprzednie.

Chciałbym bliżej scharakteryzować ukształtowany w epoce nowożytnej model, określający napięcie pomiędzy wiarą w racjonalność świata, a wiarą w realność „nieuniknionych upartych faktów". Sądzę, że model ten w dużym stopniu został ukształtowany przez filozofię Kartezjusza i jego metodę badawczą z jednej strony, a z drugiej przez mechanikę Newtona.

Aby zrozumieć istotność przedstawionej powyżej tezy, oraz aby dokładniej tę tezę naświetlić, przyjrzyjmy się filozoficznej refleksji Kartezjusza[3], której celem było dotarcie do takiego elementu „rzeczywistości", którego w żaden sposób nie można byłoby zakwestionować (radykalne wątpienie). Zauważmy, że to kartezjańskie poszukiwanie elementu nie poddającego się żadnym, nawet najbardziej sceptycznym argumentom, można ująć w formie następującej tezy:

> Szukamy takiego bytu, który jest jasno i wyraźnie postrzegany i zarazem odrzucamy wszelki byt, który nie jest jasno i wyraźnie postrzegany.

Dla lepszej ilustracji ujmijmy tę tezę w formie relacji R, porządkującej pewien zbiór obiektów[4].

> ARB wtedy i tylko wtedy, gdy obiekt A jest jasno i wyraźnie postrzegany przez obiekt B tzn., gdy obiekt A jest redukowalny do obiektu B w sensie relacji R.

Elementem nieredukowalnym w sensie relacji R okazuje się *cogito*. *Cogito* wyznacza zarazem obszar subiektywności, który Kartezjusz nazwał substancją myślącą. *Cogito* odkrywa ponadto w sobie jasno i wyraźnie ideę nieskończonego i doskonałego Boga. Idea ta nie może mieć przyczyny w skończonym *cogito*, a więc musi istnieć realny, obiektywny Bóg. Ponieważ idea Boga

---

[2]Tamże, 12.

[3]R. Descartes, *Medytacje o pierzwszej filozofii*, W–wa 1958.

[4]Zauważmy, że relację R można traktować jako relację częściowego porządku tzn. zwrotną (ARA), antysymetryczną (ARB i BRA, to $A = B$) i przechodnią (ARB i BRC, to ARC).

jest jasno i wyraźnie postrzegana przez *cogito*, więc Bóg jest redukowalny w sensie relacji R. W rozumowaniu Kartezjusza Bóg staje się gwarantem prawdziwości poznania niezależności świata materialnego od *cogito*. Dzięki odkryciu w sobie idei Boga *cogito* może stwierdzić, że poza nim istnieje niezależny i różniący się od niego obszar świata materialnego (obszar obiektywności), który Kartezjusz nazwał substancją rozciągłą. *Cogito* jest elementem obszaru subiektywności, natomiast nie istnieją żadne obiekty zawarte w obszarze obiektywności, które ujmuje relacja R. Wobec tego, w rozumowaniu Kartezjusza obszar obiektywności w gruncie rzeczy zawiera się w obszarze subiektywności. Ten fakt ma ogromne znaczenie dla kartezjańskiej metody budowy nauki uniwersalnej (i odróżnia tę metodę od koncepcji Galileusza i Newtona): całą wiedzę o świecie możemy zbudować w oparciu o to, co jasno i wyraźnie odkrywa sam umysł, a ponieważ takim obszarem oczywistości staje się zbudowana przez Kartezjusza geometria analityczna, więc buduje swoją fizyczną teorię świata (mechanikę) *more geometrico*.

Refleksja Kartezjusza doprowadza w konsekwencji do rozbicia całej rzeczywistości na dwa obszary (obszar subiektywności oraz obiektywności), między którymi pojawia się napięcie. Napięcie to jest likwidowane dzięki metodzie, a ponieważ metoda służy do budowy nauki, więc konstruowana nauka pokazuje w jaki sposób możliwe jest zlikwidowanie napięcia między obszarem subiektywności a obiektywności. Na czym polega metoda Kartezjusza krótko przedstawię w dalszej części.

Sądzę, że to kartezjańskie rozdarcie między „ciałem a duszą" określa w dużym stopniu nowożytną ideę naukowości. Pojęcia *cogito* oraz Boga, do których Kartezjusz doszedł swoim rozumowaniem, ukazywały, że możliwe jest zlikwidowanie tego napięcia, jednak nie niosły bezpośrednio ze sobą metody, która by to napięcie pozwalała zlikwidować. Uważam, że w dużej mierze nauki rozwijane w okresie nowożytnym poszukują metod, mogących zniwelować napięcie między subiektywnością a obiektywnością i tym samym precyzują nowożytną ideę naukowości zarysowaną przez Kartezjusza.

2. PROJEKT BADAWCZY KARTEZJUSZA A MECHANIKA NEWTONA

Kartezjusz rozwija czy odkrywa pewne metody (głównie w matematyce), które mają służyć zniwelowaniu ukazanego przez niego napięcia. Przykładem konkretnej metody badawczej jest metoda, na której buduje Kartezjusz geometrię analityczną[5]. To, co zbudował Kartezjusz, jest częścią jego ogól-

[5] R. Descartes, *Rozprawa o metodzie*, PWN: Warszawa, 1988.

nego planu konstrukcji matematyki uniwersalnej (*mathesis uniwersalis*, jak nazywali matematykę Starożytni), która zawarłaby w sobie całą możliwą naukę. Ta uniwersalna nauka powinna wyjaśniać wszystko co dotyczy porządku i miary, bez wnikania w szczegółowe własności przedmiotów. Geometria analityczna miała łączyć w sobie zalety geometrii (łatwiejsze operowanie pewnymi abstrakcjami matematycznymi, dzięki przedstawieniu geometrycznemu) oraz algebry (łatwiejsze dokonywanie operacji na prostych wyobrażeniowo liczbach), a unikać ich wad (geometria nuży wyobraźnię i umysł, natomiast algebra daje ogólne prawidła liczenia — które nie dają jednak twórczej wiedzy)[6].

Metoda ta łączyła więc jasne i wyraźne wyobrażenia geometryczne z jasnymi i wyraźnymi dla umysłu operacjami na liczbach czy na ogólnych symbolach algebraicznych. Polegała więc na wydzieleniu z obu tych dziedzin matematyki tych elementów, które dają się uporządkować przez relację R. Dane figury geometryczne można więc wyrażać za pomocą układów liczb czy równań i poznawać własności tych figur, wykorzystując operacje na liczbach. Pozostajemy więc w obszarze działań umysłu, które są dla niego możliwie najprostsze, a co najważniejsze pozwalają, opierając się na tym co jasne i wyraźne, krok po kroku budować całą wiedzę o świecie.

Zwróćmy uwagę na fakt, że Kartezjusz budował swoją mechanikę *more geometrico*. Geometria była dla niego praktycznie jedynym narzędziem nadającym się do budowy teorii fizycznej świata. Wiązało się to z faktem, że kartezjańska geometria (łącząca zalety geometrii i algebry) była tym, co według Kartezjusza najpełniej realizowało ideał wiedzy jasnej i wyraźnej. Mając już pewien obiekt zawarty w obszarze subiektywności nie szukał on już w sferze obiektywności, lecz w oparciu o ten już posiadany chciał budować mechanikę.

Newton natomiast szukał obiektów uporządkowanych przez relację R również w obszarze obiektywności i znalazł je w sferze zjawisk. Poza tym odkrył rachunek różniczkowy, gdyż był mu on potrzebny do opisu zjawiska ruchu. Tym samym, oba te obszary stały się równoprawne.

Mechanika Newtona dokonuje syntezy obu tych obszarów, w odróżnieniu od metody Kartezjusza, która polegała na redukcji obszaru obiektywności do obszaru subiektywności. To w zasadniczy sposób odróżnia metodę badawczą Newtona od metody Kartezjusza. Mechanika Newtona stała się istotnym, jeśli nie głównym elementem nowożytnego modelu naukowości. W teorii tej faktem stała się możliwość połączenia sfery subiektywności

[6] Tamże, 20–26.

(świata myśli, abstrakcyjnych teorii) i sfery obiektywności (świata materialnego). Ta możliwość wiązała się z ciągłością przejścia między prawami mechaniki a prawami geometrii. Różnica między geometrią a mechaniką sprowadzała się wyłącznie do stopnia ścisłości i dokładności: mechanika zajmuje się przybliżoną konstrukcją (w świecie materialnym) tego, co z dowolną dokładnością zna i co w sposób ścisły bada geometria. Z jednej więc strony mechanika jest przybliżeniem geometrii, a z drugiej strony geometria jest idealizacją mechaniki[7].

Sądzę, że te projekty badawcze w znacznym stopniu określają sposób i styl uprawiania nauki nowożytnej. Można więc mówić o powstaniu w XVII wieku nowożytnego modelu naukowości.

3. NOWE IDEE W MATEMATYCE XIX WIEKU WYKRACZAJĄCE POZA NOWOŻYTNY MODEL NAUKOWOŚCI

W matematyce XIX wieku można dostrzec powstanie wielu nowych metod badawczych. W tym okresie zaczęły rozwijać się nowe działy matematyki. Dostrzeżono problemy, które wcześniej nie uznawano za problemy *sensu stricto* matematyczne. I nawet jeśli wcześniej widać pewne zwiastuny idei rozważanych w XIX wieku, to jednak oryginalność i płodność matematyków tego okresu jest niewątpliwa. Samo pojawienie się w tak krótkim okresie tylu genialnych matematyków (np. Cauchy, Riemann, Cantor) jest faktem, który musi zastanawiać. Fakt ten domaga się wyjaśnienia, musi być jakaś przyczyna tak gwałtownego rozwoju matematyki. Chciałbym teraz przeanalizować kilka nurtów w matematyce XIX wieku, które, jak sądzę, są charakterystyczne dla matematyki tego okresu i zawierają w sobie nieznane wcześniej elementy. Tymi nurtami są: badania topologiczne, teoria mnogości oraz program z Erlangen F. Kleina. Metody, które zaczęto stosować w ramach tych właśnie nurtów wykraczały poza nowożytny model naukowości.

U podłoża tych nowych jakościowo metod w matematyce leżały, jak sądzę, dwie podstawowe tendencje, które wystąpiły z pełną siłą w pierwszej połowie XIX wieku.

1. Pierwszą z tych tendencji była chęć uściślenia podstaw analizy matematycznej. Wiek XVII i XVIII to okres intensywnego rozwoju analizy (po pracach Newtona i Leibniza), bez zwracania zbytniej uwagi na jej podstawę.

[7]M. Heller, J. Życiński, *Wszechświat — maszyna czy myśl?*, PTT: Kraków 1988, 76–82.

Kiedy jednak rozrastający się gmach analizy matematycznej zaczął natrafiać na trudne do rozwiązania problemy i wewnętrzne sprzeczności uznano, że należy określić podstawowe pojęcia analizy, podać ich ścisłe definicje i na tej podstawie przeprowadzać dopiero dalsze rozważania oraz formułować i dowodzić twierdzenia. Ten okres rygoryzacji przebiegał pod hasłem „arytmetyzacji analizy". Wielu wybitnych matematyków takich jak: Cauchy, Abel, Bolzano, Riemann, Weierstrass itd. brało w tym udział[8]. Wtedy to podano definicje ciągłości, granicy, funkcji, całki, pochodnej itd. Program ten w dużej mirze przebiegał w duchu ideału naukowości, który określony był przez metody stosowane w okresie nowożytnym. Jest jednak przynajmniej jeden element, który poza ten ideał wykraczał. Elementem tym jest metoda (nazwę ją „zasadą graniczną"), która była w pewnym sensie odwróceniem słynnej zasady ciągłości Leibniza:

„W każdym domniemanym przejściu kończącym się na jakimś kresie, dozwolone jest ustanowienie pewnego ogólnego rozumowania, którym objąć można także końcowy kres" (lub inaczej: „jeśli uporządkowane są dane, to uporządkowane są też szukane"[9]).

Zasadę graniczną można sformułować w następujący sposób: Jeśli mamy układ elementów i dokonamy na tych elementach pewnej „nieskończonej" operacji (np. przejście do granicy lub utworzenie z nich jakiejś nowej struktury), to element, który otrzymamy jako wynik tej operacji może mieć zasadniczo inne własności, niż elementy wyjściowe. Ważne jest ścisłe określenie danej operacji.

Zasadę tę stosował np. Cauchy i stała się ona istotnym składnikiem umożliwiającym przeprowadzenie dowodu hipotezy Leibniza (granica ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą) po uprzednim podaniu definicji ciągłości i granicy; w konsekwencji stała się ta zasada przyczyną odkrycia błędu w dowodzie hipotezy Leibniza i doprowadziła do pojawienia się pojęcia jednostajnej zbieżności[10].

Aby dostrzec zasadniczą różnicę między zasadą ciągłości Leibniza a zasadą graniczną, zwróćmy uwagę na pojęcie sumy nieskończonej ilości liczb (pojęcie szeregu liczbowego). Dla Eulera, który stosował zasadę ciągłości, wszystkie szeregi były zbieżne, tzn. suma dowolnego układu liczb musiała być liczbą, np.

[8]C. B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego*, PWN: W–wa 1964, 377–418.

[9]G. W. Leibniz, *Early Mathematical Manuscripts*, Chicago 1920, 147.

[10]I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge 1976, 127–134.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad \text{a}$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \frac{1}{1-2} = -1$$

Zobaczmy, jak idea ta wiąże się z nowożytnym modelem naukowości. Ponieważ pojęcie liczb i ich przeliczalnej sumy jest czymś bezpośrednio ujmowalnym przez umysł, więc jest nim również pojęcie szeregu liczbowego tzn. musi istnieć to, co jest jasno i wyraźnie postrzegane przez umysł — musi więc istnieć suma jasno i wyraźnie postrzeganego szeregu liczbowego.

Natomiast przy zastosowaniu zasady granicznej mamy następującą sytuację. Pojęcie szeregu liczbowego określa pewną strukturę dzięki definicji pojęcia nieskończonego sumowania (definicja zbieżności szeregu). Struktura ta nie musi być uchwytna dla umysłu, nie musi również posiadać tych samych własności co elementy składowe tej struktury (np. sumowane liczby). Powstała struktura jest materiałem do analizy dla umysłu. Badający tę strukturę umysł musi dostrzec jej własności oraz zależności między elementami tej struktury. Nowo powstała struktura staje się więc częściowo niezależna od umysłu, który w gruncie rzeczy ją stworzył. Zgodnie z modelem nowożytnym matematyka jest po prostu konstrukcją umysłu, natomiast w schemacie określonym przez zasadę graniczną, konstruuje się pewne struktury (całości), które dopiero trzeba poznawać i badać. W jakiś dziwny sposób splatać się zaczyna ze sobą racjonalizm i empiryzm (umysł nie posiada możliwości intuicyjnego ujęcia skonstruowanego przez siebie obiektu — musi go badać, jakby to był obiekt empiryczny, niezależny od niego). W tym właśnie uwidacznia się idea metody nowo kształtującego się modelu naukowości: skonstruowana matematyczna struktura może mieć nowe własności, które wcześniej nie występowały i nie były w ogóle brane pod uwagę; te własności trzeba dopiero poznać przy pomocy nowych metod i badań.

2. Drugą tendencją był spór pomiędzy zwolennikami geometrii syntetycznej a zwolennikami geometrii analitycznej. Pierwsi z nich odrzucali z rozważań geometrycznych wszelkie współrzędne liczbowe uważając, że można wypracować zupełnie wystarczające dla konstrukcji geometrii metody czysto geometryczne. Głównym przedstawicielem geometrii syntetycznej jest von Staudt (również Monge, Pancelet), a geometrii analitycznej wieku XIX Cauchy, Plucker i Mobius. Spór ten był sporem charakterystycznym dla modelu nowożytnego. Jedna i druga szkoła szukała podstaw, które byłyby w pełni i bezpośrednio dostępne dla umysłu — z jednej strony w formie

intuicji przestrzennej, a z drugiej w formie prostych myślowo operacji na liczbach.

Przy okazji tego sporu pojawiło się znaczenie interpretacji geometrycznych dla wyjaśniania problemów analizy czy algebry. Dokładniej chodziło o przedstawianie liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny $\mathbf{R}^2$. To, co w ramach wyobrażeń związanych z prostą rzeczywistą wydawało się urojone, stawało się w pełni rzeczywiste przy przejściu o wymiar wyżej.

Chciałbym jednak zwrócić uwagę na inne znaczenie tego właśnie nurtu w matematyce. Możliwość dokonywania interpretacji geometrycznej obiektów, które pojawiały się w ramach innych struktur matematycznych, mogła nasuwać skojarzenie, że obiekty te mają sens niezależnie od tych interpretacji. Po prostu sama struktura, którą dane obiekty tworzyły, była wystarczająca do uznania tych obiektów za matematycznie ważne, bez odwoływania się do intuicji czy do wyobraźni. W przypadku liczb zespolonych rzecz wygląda w ten sposób, że płaszczyzna $\mathbf{R}^2$ stanowi model dla tych liczb, mają one również pewną strukturę algebraiczną, ale są to przede wszystkim liczby, a więc pewne obiekty posiadające własną podstawową strukturę, która może być dopiero ewentualnie modelowana czy interpretowana. Te dwa nurty w matematyce XIX wieku miały bardzo istotny wpływ na powstanie nowych metod badawczych, a w konsekwencji były przyczyną powstania nowych działów matematyki.

4. DZIAŁANIE NOWOŻYTNEGO MODELU NAUKOWOŚCI NA PRZYKŁADZIE METOD NAUKOWYCH LEIBNIZA

Leibniz, podobnie jak Kartezjusz, chciał zrealizować ideał nauki uniwersalnej[11]. Naukę tę nazywał „charakterystyką kombinatoryczną". Idea tej nauki była ściśle związana z teorią poznania Leibniza[12].

Monady, według Leibniza, to byty proste zdolne do działania. Każda monada jest zupełnie oddzielona od innych monad, a jej działanie polega na spontanicznych spostrzeżeniach. Monada poznaje wyłącznie harmonię przedustawną ustanowioną przez Boga. W monadzie, jak w mikrokosmosie, odbija się cały świat. Monady są na różnym stopniu doskonałości — stopień doskonałości zależy od stopnia możliwości poznawania zasady harmonii przedustawnej i dlatego najdoskonalszą monadą jest Bóg. Przejście

[11] M. Gordon, *Leibniz*, W–wa 1974, 245–250; Zob. też G. W. Leibniz, *Wyznanie wiary filozofa*, W–wa 1969, 67–74; A. P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, W–wa 1976, t. 2, 273–274.

[12] G. W. Leibniz, *Wyznanie wiary filozofa*, W–wa 1969, 297–317.

od jednego spostrzeżenia do drugiego dokonuje się nieustannie i w sposób ciągły. Ponieważ monady (oprócz Boga) nie poznają w sposób doskonały (ich spostrzeżenia nie są całkiem wyraźne), więc pojawia się bardzo istotny podział na prawdy faktyczne (tzn. przypadkowe — poznawane są poszczególne elementy mechanizmu świata, a nie sama zasada funkcjonowania tego mechanizmu) oraz analityczne, rozumowe (tzn. konieczne i wieczne, które przedstawiają zasadę harmonii przedustawnej). Im doskonalszy umysł, tym więcej poznaje w sposób analityczny, a mniej w sposób faktyczny — wiedza Boga jest czysto analityczna (tożsamościowa).

Wróćmy teraz do idei charakterystyki uniwersalnej. Ponieważ człowiek ma dostęp do pewnych prawd analitycznych (według Leibniza), należy więc wybrać niewielką liczbę prostych pojęć, których treść poznawana jest przez rozum w możliwie najwyraźniejszy sposób i przypisać tym pojęciom w sposób jednoznaczny symbol tzn. ich charakter. Mając już takie charaktery, mamy w swoim ręku prawdy analityczne jako konkretne związki pomiędzy charakterami, odkrywane w sposób bezpośredni przez rozum. Znając prawdy analityczne, znamy zasadę harmonii przedustawnej, a więc znamy zasadę funkcjonowania i strukturę wszystkich istniejących bytów. Przez odpowiednią kombinację symboli odpowiadającym prostym pojęciom, możemy otrzymać każdą ideę, każdą myśl, każde zdanie.

Leibniz próbował zrealizować tę ideę, pracując w zakresie logiki matematycznej (próba formalizacji myślenia) — bez większego zresztą powodzenia. Ponieważ, podobnie jak dla Kartezjusza, czymś pozytywnym była dla niego prostota rachunków arytmetycznych, więc podał ideę rachunku geometrycznego; nazwał ten rachunek analizą położenia (*analysis situs*), w którym rolę liczb pełnią figury geometryczne, a odpowiednikiem działań na liczbach jest wzajemne położenie figur geometrycznych. Idea ta (podobnie zresztą jak idea logiki matematycznej) została rozwinięta w XIX i w XX wieku w postaci topologii.

Istnieje jeszcze trzeci punkt, w którym Leibniz próbował zrealizować ideę charakterystyki uniwersalnej (kombinatorycznej) a dotyczy on rachunku nieskończenie małych; tutaj jego prace zakończyły się częściowo powodzeniem. Jako twórca rachunku nieskończenie małych stał się Leibniz, obok Newtona, współtwórcą rachunku różniczkowego i całkowego. Zgodnie ze swoją ideą charakterystyki uniwersalnej Leibniz wyszedł od dwóch podstawowych pojęć: pojęcia sumy nieskończenie małych (pojęcie to występowało przy obliczaniu pól i objętości figur) oraz pojęcia nieskończenie małych różnic (to pojęcie było wykorzystywane natomiast przy znajdywaniu równań stycznych do krzywych). Pojęciom tym przypisał symbole: „$\int$” (symbol całki), dla oznaczenia sumy nieskończenie małych i „dx” (symbol różniczki), dla oznaczenia nieskończenie małych różnic. Cała analiza matematyczna miała być sprowadzona do odpowiedniej kombinacji tych pojęć, zgodnie oczywiście z przyjętymi regułami operowania nimi (reguły różniczkowania i całkowania).

Aby lepiej zrozumieć nową ideę metody, kształtującą się w XIX wieku i jej zasadniczą odmienność od nowożytnej idei metody spójrzmy na to, w jaki sposób dowodzi Leibniz pewnych własności i twierdzeń w ramach tworzonego przez siebie rachunku różniczkowego. Leibniz stosuje oczywiście zasadę ciągłości — jest ona dla niego pomostem między różniczkami (a więc wielkościami nieskończenie małymi) a rzeczywistością. „Tymczasem pojmujemy nieskończenie małą nie jako zero proste i absolutne, lecz jako zero względne, to znaczy jako wielkość znikającą, która jednak zachowuje charakter tej, która znika”[13]. Przypisywał więc Leibniz różniczkom pewne „rzeczywiste” własności, jakie przysługiwały innym wielkościom, jednak zarazem chciał uniknąć operowania tymi wielkościami (tzn. sądził, że różniczki są na tyle realne, że przysługują im pewne własności, lecz jednak nie na tyle, aby można wykonywać na nich operacje jak na liczbach). Dlatego też używał symboli $d(x)$ i $d(y)$ dla oznaczenia różnic skończonych i na tych symbolach wykonywał obliczenia. Dopiero po zakończeniu rachunków opuszczał nawiasy i wynik otrzymywał dla różniczek dx i dy. Uważał, że tego typu sztuczka jest dopuszczalna, gdyż stosunek $\frac{dy}{dx}$ zawsze można sprowadzić do stosunku $\frac{d(y)}{d(x)}$. Nie miał więc Leibniz co do tego wątpliwości, że istotny jest stosunek d różniczek $\frac{dy}{dx}$, a nie same różniczki. Jednak znowu jak poprzednio, nie traktował tego stosunku jako pewnej nowej wielkości, która miałaby sens sama w sobie. Innymi słowy, tak jak różniczka była nieskończenie małą różnicą, która miała zawierać w sobie własności różnic skończonych, tak również pochodna była wyłącznie stosunkiem różniczek i musiała posiadać ich własności.

Pojęcia, które otrzymuje się w wyniku takich nieskończonych operacji (np. operacji przejścia do granicy) mają sens tylko o tyle, o ile są w stanie wchłonąć w siebie własności pojęć, które je określają. Fakt, że różniczka miała dla Leibniza znaczenie sama w sobie, wynikał z jego przesłanek filozoficznych (była matematyczną monadą), a nie z uznania jej za pojęcie podstawowe z czysto matematycznego punktu widzenia. Sądzę, że w tym czasie

[13] C. B. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego*, PWN: W–wa 1964, 311.

istniało tylko jedno „podstawowe” pojęcie matematyczne — było to pojęcie liczby. To pojęcie było już w jakiś sposób zadane w intuicji matematycznej. Zauważmy, że gdy pitagorejczycy próbowali budować algebrę geometryczną (po niepowodzeniach geometrii algebraicznej) i za podstawowe pojęcie nowej matematyki przyjęli punkt, to określili go jako liczbę mającą położenie — więc również w pojęciu punktu odwoływali się do pojęcia liczby.

Przyjmując natomiast zasadę graniczną jako podstawę budowania matematyki, uważamy obiekty matematyczne otrzymane w wyniku nieskończonych operacji za obiekty mające znaczenie same w sobie, bez odwoływania się do tych pojęć, na podstawie których powstały. Wyjaśnię to dokładniej przy opisie powstania teorii mnogości czy topologii.

5. BADANIA TOPOLOGICZNE

Teraz chciałbym przedstawić jakie idee i w jaki sposób wpłynęły na powstanie metod topologicznych, a co ważniejsze ukazać, że w metodach tych tkwiły elementy wykraczające poza nowożytny model naukowości.

Można wskazać trzy podstawowe źródła, z których wyłoniła się topologia. Jednym z nich są badania dotyczące funkcji zespolonych $f(x+iy)=iv$. Badania te rozpoczął Riemann w swojej rozprawie doktorskiej, która ukazała się w 1851 roku[14]. W badaniach tych między innymi chodziło o to, aby podać takie warunki na funkcję zespoloną, aby powodowały one, że funkcja ta przekształcałaby dany obszar płaszczyzny (tzn. zbiór spójny i otwarty) na inny obszar. Te warunki (między innymi tzw. warunki Cauchy'ego–Riemanna) doprowadziły do powstania funkcji analitycznej. Natomiast rozpatrywanie funkcji analitycznych wieloznacznych doprowadziło do powstania pojęcia powierzchni riemannowskiej. W przypadku funkcji wieloznacznej otrzymujemy całą wiązkę takich powierzchni. Dana funkcja wieloznaczna „rozpada się” więc na klasę funkcji jednoznacznych (każdą z takich funkcji otrzymujemy, gdy ograniczymy jej zbiór wartości do jednej z powierzchni riemannowskich). Funkcje należące do tej klasy mają wspólną strukturę — jest nią struktura topologiczna. Oznacza to, że powierzchnie riemannowskie danej funkcji wieloznacznej są między sobą homeomorficzne. Riemann dostrzegł potrzebę badań topologicznych powierzchni odkrytych podczas analizy funkcji zespolonych i rozpoczął te badania wprowadzając pojęcie

[14] B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig 1876, 3–43; N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, PWN: W–wa 1980, 117–182.

„liczb Bettiego” powierzchni — liczby te są niezmiennikami topologicznymi i tym samym dają charakterystykę topologiczną powierzchni.

Zauważmy zresztą, że pojęcie struktury topologicznej pojawia się już przy geometrycznej interpretacji liczb zespolonych. Mając dwie dowolne liczby zespolone (na płaszczyźnie) można przejść od jednej z nich do drugiej w sposób ciągły na nieskończenie wiele sposobów (inaczej, niż w przypadku dwóch punktów na prostej, gdzie przejście ciągłe od jednego punktu do drugiego jest jednoznaczne). O możliwości interpretacji geometrycznej liczb zespolonych na płaszczyźnie i o kwestii nieskończenie wielu odwzorowań ciągłych przekształcających jeden punkt w drugi pisał Gauss w 1812 roku w liście do Bessela[15]. W tym spostrzeżeniu tkwi już zalążek metod topologicznych. Z punktu widzenia możliwości pewnych ciągłych przekształceń płaszczyzna ma znacznie bogatszą strukturę niż prosta. Wskazuje to na zasadniczą różnicę między prostą a płaszczyzną w „pewnym sensie” — tym sensem jest struktura topologiczna (nie można przejść w sposób topologiczny z prostej na płaszczyznę).

Drugim źródłem topologii jest teoria równań różniczkowych, w tym szczególnie słynny problem z mechaniki nieba dotyczący oddziaływania trzech ciał. W klasycznej fizyce Newtona prawo grawitacji dotyczy oddziaływania dwóch mas, które znajdują się w pewnej odległości od siebie (siła oddziaływania jest wprost proporcjonalna do iloczynu tych mas, a odwrotnie do kwadratu odległości ich środków). Pojawienie się trzeciej masy oddziałującej z tymi dwoma prowadzi do pewnych problemów. Załóżmy, że mamy masy m_1, m_2, m_3. Nie można rozpatrywać oddziaływania masy np. m_1 na masę m_2, bez uprzedniego uwzględnienia oddziaływania masy m_3 na masy m_1 i m_2, (lecz to oddziaływanie domaga się znów uprzedniego uwzględnienia oddziaływania masy m_1 czy m_2 na pozostałe masy). Widzimy więc, że to oddziaływanie trzeba potraktować całościowo; nie ma możliwości rozłożenie tego wzajemnego oddziaływania trzech mas na trzy oddziaływania dwóch (m_1, z m_2, m_1 z m_3 i m_2 z m_3). Najprostszym rozwiązaniem byłoby zastąpienie dwóch mas przez jedną hipotetyczną, będącą ich sumą, której środek znajdowałby się np. w średniej arytmetycznej środków mas wyjściowych. Jednak takie rozwiązanie prowadzi do wyników nie całkiem zgodnych z obserwacjami.

Przez dłuższy czas próbowano ten problem rozwiązać. Zajmowali się nim, między innymi, Lagrange (podał częściowe rozwiązanie) i Weierstrass

[15] C. F. Gauss, *Werke*, Bd. 8, Gottingen 1870–1927, 90–91; N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, PWN: W–wa 1980, 203–204.

(bez większego powodzenia). Weierstrass dostrzegł, że do rozwiązania tego problemu nie wystarczą metody klasyczne, że trzeba całkiem nowych metod. W końcu Poincare zauważył, że rozwiązanie tego problemu domaga się rozwiązania pewnych zagadnień natury topologicznej tzn. zagadnień dotyczących wzajemnego położenia rozpatrywanych ciał. Po prostu inną strukturę topologiczną posiada układ, w którym pewne różne elementy są „nierozdzielalne" (jak w przypadku zastąpienia dwóch mas przez jedną hipotetyczną) a inną układ, w którym wszystkie różne elementy są „rozdzielalne" (gdy wszystkie trzy masy traktujemy jako trzy niezależne źródła grawitacji oddziałujące wzajemnie na siebie). Aby ten problem rozwiązać trzeba uwzględnić więc różnicę w strukturze topologicznej tych dwóch przypadków. Problem trzech ciał prowadził do równań różniczkowych, których rozwiązanie wymagało rozwoju teorii niezmienników całkowych, a w prostej linii prowadziło do teorii miar niezmienniczych na grupach topologicznych[16].

Trzecim źródłem, z którego wyłoniły się problemy topologiczne, była geometria.

Bardzo istotne dla powstania topologii były analizy związane z twierdzeniem Eulera[17]. Twierdzenie to mówi, że suma ścian i wierzchołków dowolnego wielościanu wypukłego, pomniejszona o liczbę jego krawędzi, równa się 2. Próbowano uogólnić to twierdzenie. Francuski mechanik i matematyk Louis Poinsot w pracy *O wielokątach i wielościanach* pokazał, że dla pewnych gwiaździstych wielościanów ma miejsce inny związek różniący się od zależności wymaganej przez twierdzenie Eulera. Również Cauchy w *Badaniach na temat wielościanów* wskazał przykłady wielościanów nie odpowiadających zależności Eulera[18]. Okazało się, że daną zależność typu Eulera określa pewną klasę wielościanów homeomorficznych. I tak np. wyjściowe twierdzenie Eulera jest prawdziwe dla wszystkich wielościanów, których powierzchnie są homeomorficzne ze sferą.

Spójrzmy na zależność Eulera w nieco inny sposób. Zależność ta ukazuje, że różne wielościany, mające zupełnie różną strukturę geometryczną, algebraiczną itd., mają jednak pewną wspólną podstawową cechę — jest nią ten sam wzór wiążący liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian tych wielościanów. W momencie pojawienia się wzoru Eulera, w matematyce nie znano takiej struktury, która byłaby odpowiedzialna za istnienie tego podobień-

---

[16] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, W–wa 1981, 371–387.

[17] A. P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, W–wa 1977, 219–222.

[18] A. P. Juszkiewicz (red.), *Matematika XIX wieka (Gieomietria Tieoria analiticzeskih funkcij)*, Izdatelstwo Nauka: Moskwa 1981, 97–98.

stwa. Badania, które z jednej strony szły kierunku poszukiwania dowodu twierdzenia Eulera (to twierdzenie było na początku traktowane jako hipoteza), a z drugiej strony na szukaniu kontrprzykładów do tej hipotezy, doprowadziły w końcu do podania klasyfikacji topologicznej wielościanów. Tym samym znaleziono podstawę, która odpowiadała za prawdziwość wzoru Eulera dla figur geometrycznych mających zupełnie inną strukturę matematyczną (do tamtej pory) — tą podstawą była topologia.

Innym problemem geometrycznym, który naprowadził na rozważania topologiczne, było słynne zadanie Eulera o „mostach królewieckich”[19]. W Królewcu, w czasach Eulera, na rzece Pregoła znajdowały się dwie wyspy A i B połączone mostem. Wyspa A połączona była z każdym brzegiem rzeki dwoma mostami, a z wyspy B prowadził na każdy z brzegów jeden most. W sumie było więc siedem mostów łączących cztery różne obszary. Zadanie polegało na tym, aby przejść przez wszystkie mosty dokładnie jeden raz. Widać, że przy tym problemie nie istotna jest wielkość oraz kształt obszarów, jak również sposób ich połączenia przy pomocy mostów. Ważne jest tylko ich wzajemne położenie tzn. ważny jest fakt, że obszary te są rozdzielone oraz ile mostów je łączy. Innymi słowy, problem sprowadzał się do znalezienia funkcji wzajemnie jednoznacznej i ciągłej odcinka na pewną krzywą, przy czym czterem obszarom odpowiadają cztery punkty połączone siedmioma łukami, które odpowiadają znów siedmiu mostom (oczywiście, wzajemna jednoznaczność jest wymagana poza punktami rozgałęzienia tej krzywej). Jest to więc problem czysto topologiczny znalezienia odwzorowania topologicznego jednej figury geometrycznej na inną.

Oczywiście, wszystkie te rozważania geometryczne (jak również z zakresu mechaniki czy funkcji zespolonych) nie mogły doprowadzić do powstania topologii jako gałęzi matematyki, gdyby nie uściślenie pojęć granicy, ciągłości i funkcji (ścisła definicja tych pojęć była wynikiem wspomnianego wcześniej nurtu w matematyce XIX wieku dotyczącego arytmetyzacji analizy) — pojęcia te stały się podstawowe w topologii, zresztą nie tylko w topologii.

Na czym polegała nowość metod topologicznych w stosunku do modelu nowożytnego (można powiedzieć w stosunku do matematyki klasycznej)? Aby to zrozumieć spójrzmy na wypowiedź Listinga (był uczniem Gaussa i pierwszy użył terminu topologia):

„Pod pojęciem topologii będziemy rozumieć naukę o modalnych związkach obrazów przestrzennych lub o prawach spójności wzajemnego położe-

[19] A. P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, W–wa 1977, 222–223.

nia punktów, linii, powierzchni, ciał i ich części, lub ich zbioru w przestrzeni, niezależnie od związku z miarą i wielkością”[20].

Przez związki modalne Listing rozumie te własności figur, które zachowują się przy odwzorowaniach ciągłych. Topologia bada więc, według Listinga, niezmienniki odwzorowań ciągłych (później zawężono badania topologii do niezmienników odwzorowań wzajemnie ciągłych).

W nowożytnym modelu naukowości chodziło o to, aby mając własności pewnych obiektów matematycznych wykonywać na tych obiektach takie operacje, które dają pełną kontrolę umysłu nad zmianą rozpatrywanych własności w trakcie tych operacji (własności obiektów, jak również operacje matematyczne wykonywane na tych obiektach musiały być jasne i wyraźne dla umysłu). W programie badań topologicznych co innego jest istotne. Przy dokonywaniu pewnej matematycznej operacji możemy otrzymać zupełnie nową strukturę, której własności nie mieszczą się we własnościach elementów, na których dana operacja była wykonywana. Dlatego jest sens wydzielić niezmienniki danej operacji (w tym przypadku niezmienniki odwzorowań ciągłych) i utworzyć teorię, która te niezmienniki będzie badać. Zgodnie z przyjętym założeniem, badanie niezmienników danej operacji rzeczywiście oddziela daną teorię matematyczną od innej, gdyż obiekt powstały w wyniku danej operacji posiada również własności, które wcześniej nie występowały, a do których nie koniecznie musimy mieć dostęp metodami danej teorii. Jednak jest sens badać obiekt wymykający się częściowo spod kontroli metod, które posiadamy. W duchu nowożytnego modelu naukowości badania takich obiektów, nie będących pod pełną kontrolą umysłu, nie miałyby żadnego sensu. Dzięki nowej idei metody, która pojawiła się w XIX wieku, znów odrodził się problem platonizmu w matematyce. Chodzi o to, że konstruujemy obiekty, których w pełni poznać nie możemy. Mają więc te obiekty obiektywną, niezależną w pewnym stopniu od naszego umysłu formę istnienia. Wielu matematyków XIX wieku (np. Riemann, Cantor, Frege, Poincare) rozpoczęło więc refleksje nad naturą matematyki przyjmując nierzadko postawę platońską (np. Cantor czy Frege).

6. TEORIA MNOGOŚCI

Sądzę, że podobnie jak topologia, również teoria mnogości wykracza poza nowożytny model naukowości. Na czym polega ta nowość badań teoriomnogościowych?

---

[20] J. B, Listing, *Predwaritelnye issledowania po topologii*, Moskwa 1932, 35.

Przez całe wieki czymś paradoksalnym wydawała się możliwość nieskończonej podzielności wielkości rozciągłej. Eleaci „dowodzili" niemożliwości tego podziału, gdyż w wyniku tego dzielenia otrzymalibyśmy elementy nie posiadające wielkości, co według nich było niemożliwe. Wynika z tego, że niemożliwe jest, aby np. prostą można było traktować jako zbiór punktów. Ten sposób rozumowania kryje w sobie następujące założenie: jeśli pewne elementy grupujemy w jakąś całość, to całość ta nie może posiadać własności, których nie posiadają elementy ją tworzące; i również inaczej: dzieląc pewną całość na elementy składowe nie możemy otrzymać elementu, który miałby własności jakich nie posiadałaby wyjściowa całość. Widzimy, że jest to zaprzeczenie zasady granicznej, o której pisałem wcześniej i która według mnie stała się jednym z głównych elementów powstania matematyki nieklasycznej (tzn. matematyki wykraczającej poza nowożytny model naukowości). W zasadzie granicznej tkwi więc idea metody nowo kształtującego się modelu naukowości.

Spójrzmy jak zasada graniczna kształtuje schemat, w którym powstała teoria mnogości. Przyjrzyjmy się definicji zbioru, podanej przez Cantora: „Przez zbiór rozumiemy zgrupowanie w jedną całość wyraźnie różnych przedmiotów naszej intuicji lub naszej myśli"; lub: „Każdy zbiór dobrze odróżnionych rzeczy może być traktowany jako jednolita rzecz dla siebie"[21].

Definicje te wydają się bardzo nieprecyzyjne. Jednak zawierają pewien istotny element. Dla Cantora do tego, aby utworzyć z pewnych elementów jakiś zbiór, wystarczy mieć kryterium pozwalające rozdzielić te elementy („wyraźnie różne przedmioty naszej intuicji") — i to w zupełności wystarczy. Te elementy nie muszą mieć wspólnej własności zezwalającej dopiero na tworzenie z nich pewnej całości. Tym samym nie znane są *a priori* własności zbioru, który otrzymamy w wyniku pewnej operacji. Te własności trzeba dopiero poznać analizując sam zbiór i jego konstrukcję. Nowo skonstruowany zbiór może zawierać w sobie cały świat nowych, nieznanych uprzednio własności.

Zobaczmy jak w tym ujęciu powstaje zbiór liczb naturalnych. Jeśli przyjmujemy zasadę, że do utworzenia jakiegoś zbioru trzeba znać własności jego elementów, to wtedy pojęcie zbioru (wszystkich) liczb naturalnych nie ma sensu. Wynika to z tego, że z powodu nieskończonej ilości liczb naturalnych nie możemy znać własności ich wszystkich. Stąd brało się odrzucenie nieskończoności aktualnej jako takiego pojęcia, które przeczyło tej zasadzie.

[21] G. Cantor, *Gessammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Springer Verlag: Berlin–Heidelberg–New York, 1980, 282.

Zgodnie z definicją Cantora nie ma przeszkód dla utworzenia zbioru liczb naturalnych — są rozróżnialne i to wystarczy. Fakt rozróżnialności liczb naturalnych wynika z tego, że każda z nich składa się z różnej liczby jedynek. Mimo tego, że nie znamy własności wszystkich liczb naturalnych, to jednak znamy zasadę tworzenia kolejnych dowolnie dużych liczb. Liczby naturalne tworzą więc pewną strukturę — tę strukturę możemy traktować jako obiekt matematyczny będący nową jakością w stosunku do tworzących go elementów.

Spójrzmy jak dalej działa „zasada Cantora" konstrukcji zbiorów. Otrzymawszy zgodnie z powyższą zasadą całą rodzinę zbiorów szukamy najprostszego kryterium, które umożliwiałoby rozróżnienie zbiorów należących do pewnej klasy, nie koniecznie wskazując na własności tych zbiorów. Tym kryterium okazuje się odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne pomiędzy zbiorami tzn. dwa zbiory A i B zaliczamy do tej samej klasy, jeśli istnieje funkcja f wzajemnie jednoznaczna odwzorowująca zbiór A na zbiór B. Zauważmy, że funkcja o takiej własności nie domaga się żadnych konkretnych własności zbiorów A i B, jednak jest w stanie je rozróżnić — jeśli zbiory A i B są różne, to funkcja f nie jest tożsamościowa.

Tak otrzymane klasy nazywa Cantor liczbami kardynalnymi. Oczywiście, kryterium rozróżniające zbiory A i B może wskazywać (lecz nie musi) na pewne własności tych zbiorów. Tak jest w przypadku liczb porządkowych, które powstają analogicznie jak liczby kardynalne, jednakże funkcja wzajemnie jednoznaczna będąca podstawą otrzymania tych liczb musi zachowywać porządek istniejący na zbiorach A i B. Jeśli więc istnieje kryterium rozróżnienia pomiędzy pewnymi elementami, to jest to warunek wystarczający do tego, aby te elementy traktować jako jednolitą całość. Brak takiego kryterium uniemożliwia natomiast tworzenie takiej całości. I tak np. nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów, bo nie jest możliwe wskazanie kryterium, które by rozróżniało wszystkie możliwe zbiory. Cantor uważa, że również w przypadku tworzenia zbiorów skończonych nie można wskazać innego kryterium oprócz kryterium wyraźnego rozróżniania elementów tworzących dany zbiór tzn. zbiory nieskończone mają takie same prawo do istnienia jak zbiory skończone. Zobaczmy, co pisze sam Cantor na temat „wielości nieskończonych" (tzn. liczb kardynalnych nieskończonych).

„Czy nie byłoby do pomyślenia, że już te wielości są, sprzeczne i że sprzeczność przyjęcia tego, iż wszystkie te elementy tworzą pewną całość jeszcze tylko nie zwróciła na siebie uwagi? Moja odpowiedź na to brzmi, że pytanie to należy również rozszerzyć na wielości skończone i że dokładne rozważanie prowadzi do następującego wyniku: nawet dla wielości skończonych nie da się przeprowadzić ‘dowodu’ ich ‘niesprzeczności’. Innymi słowy: fakt ‘niesprzeczności’ wielości skończonych jest prostą, niedowodliwą prawdą, jest ‘aksjomatem arytmetyki’ (w starym sensie tego słowa). Tak samo niesprzeczność wielości, którym przypisuję alefy jako liczby kardynalne jest aksjomatem rozszerzonej arytmetyki pozaskończonej”[22].

7. PROGRAM Z ERLANGEN

W 1872 roku niemiecki matematyk F. Klein ogłosił program w geometrii[23], który — jak sądzę — miał w istocie swojej wiele wspólnego z programem Cantora budowy teorii mnogości czy z ideą metod topologicznych. Uważam, że w programie Kleina w sposób najbardziej wyraźny została przedstawiona idea metody nowo kształtującego się modelu naukowości. Przyjrzyjmy się dokładniej *Rozważaniom porównawczym o nowszych badaniach geometrycznych*, gdzie F. Klein przedstawia swoją koncepcję.

Klein wychodzi od spostrzeżenia, że istnieją przekształcenia, które nie zmieniają własności pewnych figur geometrycznych. Za podstawowe własności uznaje tzw. własności geometryczne tzn. własności niezależne od położenia, wielkości bezwzględnej i od porządku. Istnieją pewne przekształcenia (przesunięcia, obroty, symetrie, podobieństwa), które nie zmieniają własności geometrycznych. Co więcej, przekształcenia te tworzą grupę, którą Klein nazywa grupą główną. Można więc traktować geometrię elementarną jako teorię badającą te własności figur geometrycznych, które nie zmieniają się pod działaniem grupy głównej.

Zauważmy co dzieje się, gdy zamiast grupy głównej będziemy rozpatrywać pewną jej podgrupę np. podgrupę wszystkich przekształceń zachowujących długości odcinków (tzn. izometrii). Oczywiście, większa ilość własności figur jest zachowywana przy izometriach, niż przy przekształceniach grupy głównej (obszerniejszej od izometrii). Oznacza to, że struktura przestrzeni w stosunku do grupy głównej jest uboższa (badamy mniej własności), niż struktura przestrzeni w stosunku do grupy izometrii. Można jednak sztucznie wzbogacić strukturę przestrzeni, w przypadku grupy głównej, o dodatkowy element, który jest zarazem elementem stałym grupy izometrii. Otrzy-

[22]Tamże, 249; tekst polski w tł. R. Murawskiego na podstawie: *Filozofia matematyki* (antologia tekstów klasycznych), red. R. Morawski, Poznań 1986, 174.

[23]Program ten został ogłoszony z okazji wstąpienia do senatu uniwersytetu w Erlangen w 1872 r., a ukazał się drukiem w: „Mathematische Annalen”, 43 (1893); tekst polski w tł. S. Dicksteina, „Wiadomości Matematyczne”, t. 4 (1900), 27–61.

mujemy tym samym dwie równoważne sytuacje: „Jest jedno i to samo, czy utwory przestrzenne badamy ze względu na grupę główną i dołączamy do nich punkt dany czy też, gdy nie dołączając nic danego, zastępujemy grupę główną przez grupę w niej zawartą, a której przekształcenia punkt ten pozostawiają bez zmiany”[24].

Załóżmy, że mamy przestrzeń geometryczną X i działającą na niej grupę izometrii I. Jeśli dołączymy do przestrzeni X dodatkowy element, którym w tym przypadku może być odcinek o ustalonej długości, to wówczas przestrzeń X wraz z tym ustalonym odcinkiem oraz z grupą główną G działającą na rozszerzonej przestrzeni X, jest równoważna przestrzeni X z grupą I. Można to zapisać w inny sposób: $(X, I) \simeq (X, d, G)$, gdzie d jest ustaloną metryką na przestrzeni X tzn. badanie przestrzeni X przy pomocy grupy izometrii jest równoważne badaniu przestrzeni X (wraz z ustaloną strukturą metryczną) przy pomocy grupy głównej. Na czym polega ta równoważność?

Chodzi o to, że mimo, iż przy działaniu grupy głównej wielkości figur mogą ulec zmianie, to jednak jest pewien element, którego wielkość się nie zmienia (gdyż uznajemy go za element stały przekształceń grupy głównej). Dzięki temu możemy dalej porównywać wielkości figur (gdyż mamy wprowadzoną ustaloną strukturę metryczną). W przypadku rozpatrywania grupy izometrii narzucenie na przestrzeń takiej ustalonej struktury metrycznej nie było konieczne — wielkości figur można było porównywać przy pomocy przekształceń izometrycznych (odcinek A jest mniejszy od odcinka B, jeśli istnieje taka izometria k, że $k(A) \subset B$. Możemy jednak rozszerzyć grupę główną i wówczas „[...] tylko część własności geometrycznych zachowa się bez zmian. Pozostałe własności nie są już własnościami utworów przestrzennych w sobie, lecz własnościami układu, który powstaje, gdy do niego dołączamy pewien utwór wyróżniony. Ten utwór szczególny, o ile jest oznaczony określa się w ten sposób, że gdy przyjmiemy go za stały, to wtedy wśród przekształceń grupy danej, tylko przekształcenia grupy głównej dadzą się do tej przestrzeni stosować”[25].

Można na przykład rozszerzyć grupę główną do grupy wszystkich przekształceń rzutowych. Wówczas geometria rzutowa staje się teorią niezmienników tak rozszerzonej grupy. W jaki sposób można ze stanowiska rzutowego rozumieć własności metryczne (a więc własności figur zachowywane przez grupę główną, gdy mamy ustaloną strukturę metryczną przestrzeni)?

[24]Tamże, 32.
[25]Tamże, 32.

Jeśli przekształcamy figury geometryczne przy pomocy grupy głównej, to mimo, że wielkości figur mogą ulec zmianie, to jednak zachowuje się coś, co pozwala zachowywać ich wielkości — tym czymś jest struktura metryczna (odcinek pozostanie odcinkiem, elipsa elipsą itp.). Natomiast przy przekształceniach rzutowych nie zachowują się własności metryczne (np. odcinek może przejść na punkt i nie ma sposobu porównania ich wielkości). Możemy jednak rozszerzyć wyjściową przestrzeń X o dodatkowy element: urojone koło w nieskończoności, jeśli przestrzeń X jest płaszczyzną. To koło samo w sobie się nie zmienia pod działaniem grupy głównej. Zakładamy więc, że własności metryczne tego koła (tzn. własności, które nie zmieniają się pod działaniem grupy głównej) są własnościami rzutowymi tzn. takimi, które nie zmieniają się pod wpływem przekształceń rzutowych. Mówiąc inaczej, urojone koło w nieskończoności uznajemy za punkt stały wszelkich przekształceń rzutowych. Tym samym, to rozszerzenie przestrzeni X o dodatkowy element pozwala nam badać własności metryczne przy pomocy przekształceń rzutowych.

Powyższe rozważania prowadzą jednak do znacznie poważniejszych konsekwencji. Chodzi o to, że geometria zostaje sprowadzona do teorii niezmienników danej grupy przekształceń. „Jak długo podstawą badania geometrycznego jest ta sama grupa przekształceń, treść geometrii pozostaje niezmienną”[26]. Oznacza to, że dana ustalona grupa przekształceń jednoznacznie ustala daną geometrię, niezależnie od przestrzeni na której działa, na przykład niezależnie od wymiaru przestrzeni; F. Klein podaje jako przykład równoważność geometrii rzutowej na krzywej stożkowej oraz geometrii rzutowej na płaszczyźnie.

„Przyjmijmy na stożkowej za element parę punktów, zamiast punktu. Można ustanowić odpowiedniość między ogółem par punktów stożkowej a ogółem prostych płaszczyzny, przyporządkowując każdą prostą tej parze punktów, w której przecina stożkową. Przy tym odwzorowaniu, przekształcenia liniowe odtwarzające stożkową przechodzą na przekształcenia liniowe płaszczyzny (uważaną za złożoną z prostych), pozostawiające bez zmian stożkową”[27].

Tego typu równoważność można ustalać między istotnie różnymi przestrzeniami.

W programie Kleina, którego istotę powyżej przedstawiłem, w sposób bardzo wyraźny uwidacznia się idea metody, o której wspominałem wcze-

[26]Tamże, 37.
[27]Tamże, 37.

śniej, a która wykracza poza nowożytny model naukowości. W tym ujęciu istotna staje się ogólna struktura (np. grupa przekształceń), którą narzucamy na badaną przestrzeń. Sama możliwość narzucenia takiej struktury determinuje już własności takiej przestrzeni. Jeśli rozszerzamy daną strukturę (np. bierzemy większą grupę przekształceń), to liczba własności, które poprzez tę strukturę się ujmuje, maleje. Jeśli chcemy więc zachować ten wcześniejszy zakres badań poprzez nową powiększoną strukturę, to należy wzbogacić pierwotnie rozważaną przestrzeń o nowe elementy (jako przykład może służyć analiza własności metrycznych z punktu widzenia rzutowego lub analiza własności izometrycznych z punktu widzenia grupy głównej). Nieistotne staje się więc to, z czego dana przestrzeń się składa, ważne jest jedynie to, jaką strukturę narzucamy na tę przestrzeń. Ta narzucona struktura pozwala (i jest wystarczająca) poznać własności badanych obiektów matematycznych.

Widać stąd, że w gruncie rzeczy obiektem matematycznym w tym nowym ujęciu jest pewna ogólna struktura matematyczna. W przypadku programu Kleina tą strukturą jest grupa przekształceń, a jeśli chodzi o teorię mnogości Cantora, tą strukturą jest zbiór wraz z metodą jego konstrukcji.

W tym nowym ujęciu znalazła pełny wyraz dawna intuicja dotycząca tego, że niemożliwe jest utworzenie prostej z pojedynczych punktów — nie ma żadnej metody takiej konstrukcji (fakt ten analizował już Arystoteles). Mając dopiero ogólną strukturę prostej możemy tę strukturę badać i między innymi stwierdzić, że w jej ramach pojawiają się obiekty, którym możemy przypisać pojęcie punktu.

Wiesław Wójcik