ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
IX / 1987, s. 16–39*

A. A. FRIEDMAN

PRZESTRZEŃ

„Wszystko pod miarą i liczbą zostało stworzone”

(Księga Mądrości Salomona)

I. Wielkości mierzalne

1. Rozpatrując różne *własności*, przysługujące obiektom materialnego świata, możemy te własności podzielić na oddzielne klasy, zaliczając do tej samej klasy własności odznaczające się jakąkolwiek wspólną cechą. Własności zaliczane do tej samej klasy twarzą *rozmaitość*, która może być takiej lub innej mocy; mówiąc inaczej, w większości przypadków można ją postawić we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości bądź ze zbiorem liczb całkowitych, bądź ze zbiorem wszystkich liczb, bądź też ze zbiorom par, trójek, itd. wszystkich liczb. Każdej własności należącej do danej klasy będzie odpowiadać jedna i tylko jedna liczba (lub jedna i tylko jedna para liczb, lub jedna i tylko jedna trójka liczb, itd.) zbioru liczbowego, i odwrotnie. Ustanowienie reguł przy pomocy których można znajdował liczbę (lub parę, lub trójkę liczb) odpowiadającą danej własności należącej do danej klasy, i odwrotnie — przy pomocy której można znajdować własność odpowiadającą danej liczbie (parze, trójce, itd. liczb), będziemy skrótowo nazywać *arytmetyzacją danej klasy.*

Przytoczmy dwa proste przykłady. Ludzie posiadają własność różnej płci; własności bycia kobietą przypiszmy liczbę 0 (zero); własności bycia mężczyzną przypiszmy liczbę 1. Ustanowienie tej reguły daje arytmetyzację pewnej klasy własności. Wszystkie ciała materialne odznaczają się własnością posiadania objętości; wyrażając objętość w metrach sześciennych,

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

znajdujemy regułę przyporządkowania liczb objętościom danych obiektów; mówiąc inaczej otrzymujemy arytmetyzację klasy objętości.

2. Arytmetyzacji danej klasy własności można dokonywać w zasadzie dowolnie. Niech jednak własności danej klasy będą tego rodzaju, że można do nich stosować pojęcia „większe od” lub „mniejsze od” (oczywiście odpowiednio zdefiniowane); takie własności umówimy się nazywać *stopniowalnymi*. Jeżeli arytmetyzacja danej klasy została wykonana w ten sposób, że większej własności stopniowalnej odpowiada większa liczba, to taka arytmetyzacja nazywa się *oszacowaniem*. Stopień wiedzy u studentów jest własnością stopniowalną (zakładając, że potrafimy określić większy lub mniejszy stopień wiedzy), a pięcio– lub dwunastostopniowy system ocen jest arytmetyzacją klasy stopni wiedzy studentów; tę arytmetyzację nazywamy wystawianiem not studentom.

Rozumie się samo przez się, że każda klasa własności stanie się klasą własności stopniowalnych, z chwilą gdy w taki czy inny sposób określimy pojęcie „większy od” lub „mniejszy od” w odniesieniu do własności danej klasy. Większość badanych własności należy bezpośrednio do rodziny własności stopniowalnych, ponieważ już w samym określeniu danej klasy własności mieści się pojęcie większości lub mniejszości stosujące się do własności danej klasy. Niekiedy jednak własności bywają tak określone, że ich sprowadzenie do własności stopniowalnych wymaga dodatkowych definicji. Za przykład może służyć własność posiadania barwy przez monochromatyczną wiązkę światła. Na pierwszy rzut oka traktowanie barwy jako własności stopniowalnej wydaje się pozbawione sensu. Jednakże wprowadzając dodatkowe określenie, możemy uważać tę barwę za „większą”, której odpowiada większa długość fali. Z chwilą gdy określenie to zostaje wprowadzone, barwa staje się własnością stopniowalną i nie trudno już dokonać takiej arytmetyzacji, żeby stała się ona oszacowaniem. Tak więc, sprowadzenie danej klasy własności do typu własności stopniowalnych całkowicie zależy od naszych określeń, czyli od naszego wyboru. Nie dotykam tu rzecz jasna, zagadnienia celowości używania terminu „stopniowalność” w odniesieniu do tej czy innej własności.

3. Wśród własności stopniowalnych wyróżnia się szczególna klasa, odznaczająca się charakterystycznymi cechami, które dopuszczają specjalne oszacowanie (arytmetyzację), zwane pomiarem. Niech $A_1, A_2, A_3, \ldots$ będą własnościami stopniowalnymi należącymi do pewnej klasy A. Ponieważ mamy tu do czynienia z własnościami stopniowalnymi, ma sens stwierdzenie: A_1 jest mniejsze od A_2. Załóżmy, że dla własności stopniowalnych należących do

klasy A, zdefiniowaliśmy pojęcie trzech równoodległych własności stopniowalnych; przy czym przez trzy równoodległe własności będziemy rozumieć takie własności stopniowalne A_1, A_2, A_3, że A_1 jest o tyle mniejsze od A_2 o ile A_2 jest mniejsze od A_3. Umówimy się własności stopniowalne, należące do klasy A, dla których zdefiniowaliśmy równoodległość trzech własności stopniowalnych, nazywać *własnościami mierzalnymi.*

Rozumie się samo przez się, że przy pomocy odpowiedniej definicji dowolną klasę wielkości stopniowalnych można zamienić na klasę własności mierzalnych. Podobnie jak w przypadku przekształcenia jakiejś własności we własność stopniowalną, i w tym przypadku mogą wystąpić dwie możliwości: albo już w samym określeniu danej klasy wielkości będzie się mieścić przepis na, równoodległość trzech własności stopniowalnych — w takim przypadku od samego początku mamy do czynienia z własnościami mierzalnymi; albo w samym określeniu danej klasy nie mieści się przepis równo[od]ległości trzech własności stopniowalnych — wówczas daną klasę własności stopniowalnych możemy zamienić na klasę własności mierzalnych dopiero po dodatkowym wprowadzeniu wyżej wspomnianego przepisu na równoodległość. Za przykład własności stopniowalnych z samego swojego określenia będących własnościami mierzalnymi, może służyć objętość materialnego ciała lub długość odcinka. Istotnie definiując pojęcie objętości lub długości odcinka, on samego początku określamy, co należy rozumieć przez większą objętość lub większą długość, jak również, co należy rozumieć przez trzy równoodległe długości trzech odcinków. I przeciwnie, własność stopnia wiedzy posiadanej przez studenta z definicji nie jest własnością mierzalną i dotychczas nie udało się znaleźć przepisu na równoodległość stopnia wiedzy studentów.

4. Dokonamy teraz arytmetyzacji (oszacowania) klasy mierzalnych własności w taki sposób, żeby kolejne różnice liczb, odpowiadające dowolnym trzem równoodległym własnościom, byty równe sobie. Mówiąc inaczej: jeśli a_1, a_2, a_3 są liczbami odpowiadającymi takim trzem równoodległym i kolejno coraz większym własnościom A_1, A_2, A_3, to $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.

Podobnego rodzaju oszacowanie klasy mierzalnych własności będziemy nazywać mierzalnością. Widzimy, te arytmetyzacji własności danej klasy można dokonać w zupełnie dowolny sposób. W ocenie własności stopniowalnych w danej klasie swoboda jest dużo mniejsza, lecz wszystkie oceny są ogromnie ważne. Zobaczmy jaka może być dopuszczalna swoboda przy pomiarze mierzalnych własności należących do danej klasy. Niech klasa A takich własności mierzalnych będzie mierzona dwoma różnymi sposobami:

w pierwszym przypadku stopniowanym własnościom $A_1, A_2, A_3, \ldots$ odpowiadają liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots$, w drugim — liczby $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots$. Z własności arytmetyzacji wynika, że $\bar{a} = f(a)$, gdzie f jest jednoznacznie określoną funkcją a. Jeśli A_1, A_2, A_3 są trzema równoodległymi wielkościami, to z własności podstawowej wynika $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ i jednocześnie $\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = \bar{a}_2 - \bar{a}_1$. W ten sposób przy $a_2 = \frac{\bar{a}_3 + \bar{a}_1}{2}$ zachodzi równość $\bar{a}_2 = \frac{\bar{a}_3 + \bar{a}_1}{2}$, lecz jeśli $\bar{a} = f(a)$, to $f(a_2) = \frac{f(a_3) + f(a_1)}{2}$ lub $f\left(\frac{a_3 + a_1}{2}\right) = \frac{f(a_3) + f(a_1)}{2}$ dla każdego a_1, a_3 zamieniając a_1 na x, a_3 na y, znajdziemy, że dla każdego x i y będzie prawdziwe następujące funkcyjne równanie:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{1}$$

Można wykazać, że rozwiązanie funkcyjnego równania (1) ma postać

$$f(a) = \mu a + h$$

gdzie μ i h są stałymi liczbami.

Znalezione wyrażenie na $f(a)$ spełnia oczywiście równanie (1)

$$\mu\frac{x+y}{2} + h = \frac{1}{2}(\mu x + h + \mu y + h) = \frac{1}{2}\mu(x+y) + h.$$

W ten sposób znaleźliśmy postać ogólną $f(a)$ pozwalającą przechodzić od jednego sposobu mierzenia do drugiego

$$\bar{a} = f(a) = \mu a + h \tag{2}$$

Ta ogólna formuła przejścia od jednego sposobu mierzenia do drugiego posiada dwie stałe. Stała h charakteryzuje dowolność *wartości początkowej*; mówiąc inaczej, dowolność własności stopniowalnej, która odpowiada wartości zerowej mierzącej ją liczby.

Stała μ charakteryzuje dowolność *jednostki pomiaru*, inaczej mówiąc, dowolność dwóch własności stopniowalnych dla których różnica liczb określających je równa jest 1. Zadając początkową wartość i jednostkę pomiaru, jak łatwo zobaczyć można w pełni i jednoznacznie określić obie stałe μ i h z formuły (2). Inaczej mówiąc określimy w sposób jednoznaczny mierzalność własności stopniowalnych danej klasy. W rzeczy samej, niechaj własnością stopniowalną A_0 klasy A jest wartość początkowa (tzn. przy pomiarze powinna odpowiadać 0), i niech własności stopniowalne A_1 i A_2 określają jednostkę pomiaru (tzn. niech różnica określających je liczb jest równa 1). Dokonamy w jakiś sposób pomiaru klasy A; załóżmy, że przy tym pomiarze własnościom stopniowalnym A_0, A_1, A_2 będą odpowiadać liczby a_0, a_1, a_2. Wtedy szukany pomiar da nam liczbę $\bar{a}$ związaną z ustalonymi w równaniu (2) liczbami a. Pozostaje nam dobrać μ i h tak aby $\bar{a_0} = 0, \bar{a_2} - \bar{a_1} = 1$, inaczej mówiąc tak by spełnione były równości:

$$\mu a_0 + h = 0, \quad \mu(a_2 - a_1) = 1,$$

stąd

$$\mu = \frac{1}{a_2 - a_1}, \quad h = \frac{a_0}{a_2 - a_1}.$$

5. Nadzwyczaj często w praktyce pomiarowej spotykamy się z dowolnością wyboru jednostki pomiarowej, a znacznie rzadziej z dowolnością wyboru wartości początkowej. Wynika to z praktycznej dogodności przyjęcia za wartość początkową takiej własności stopniowalnej danej klasy, która posiada pewne szczególne własności. Tak np. przy pomiarze długości odcinka za wartość początkową zawsze bierzemy długość odcinka na prostej między odpowiednimi punktami, podczas gdy za jednostkę pomiaru bierzemy dowolną z jednostek długości (arszyny, stopy, metry itp.).

Istnieje jednakże własność stopniowalna, dla której praktyka dopuszcza dużą różnorodność wartości początkowych — tą własnością jest temperatura. W rzeczy samej przy pomiarze temperatury w stopniach Celsjusza i Réaumura za wartość początkową bierzemy temperaturę topniejącego lodu, a przy korzystaniu ze skali Fahrenheita przypisujemy temperaturze topniejącego lodu liczbę 32, zaś w skali absolutnej liczbę 273. Jasne jest, że jednostka pomiaru temperatury jest różna: dla stopni Celsjusza wiemy, te różnica między cyfrą odpowiadającą wrzeniu wody i topnieniu lodu wynosi 100, natomiast na skali Réaumura liczba ta równa jest tylko 80.

6. Zająłem się tak drobiazgowo zagadnieniem pomiaru z dwóch przyczyn. Z jednej strony w przyszłości nieprzerwanie będziemy przeciwstawiać prosty proces arytmetyzacji procesowi mierzenia, a z drugiej strony w zagadnieniu pomiaru, tak prostym w swej istocie zauważa się ważne niedomówienie w wielu klasycznych kursach mechaniki i fizyki. Moim zadaniem było rozjaśnienie tego problemu i równocześnie pokazanie jak duża jest swoboda przy ustalaniu wymiaru[1].

---

[1]Patrz piękny artykuł: *Runge, Maass und Messen, Encyclopedie d. Mathemat. Wissenschaften*, Bd. V.

Tak więc, każda klasa własności może być arytmetyzowana; jeśli te własności stają się (poprzez określenie) własnościami stopniowalnymi, to możemy nie tylko arytmetyzować je, ale i oszacować liczbami. W końcu jeśli własności stopniowalne danej klasy stają się (znowu poprzez określenie) własnościami mierzalnymi, to nie tylko możemy oszacować je liczbami lecz również zmierzyć. Pomiar dopuszcza znaczną dowolność, która znika jeżeli ustalimy jego wartość początkową i jednostkę.

II. Arytmetyzacja przestrzeni

1. Przestrzeń geometryczna, bądź krócej przestrzeń, jest całokształtem elementów zwanych punktami, liniami, powierzchniami, kątami, odległościami itp. związanych pomiędzy sobą w określony sposób ustalony systemem aksjomatów i wynikających z nich twierdzeń[2]. Przestrzeni geometrycznej może odpowiadać materialna przestrzeń fizyczna w tym sensie, że każdemu elementowi przestrzeni geometrycznej odpowiada jakiś obraz przestrzeni fizycznej. Związek przestrzeni fizycznej z przestrzenią geometryczną może być realizowany wieloma różnymi i często fantastycznymi sposobami. Wystarczy wspomnieć rozmaitość interpretacji tzw. nieeuklidesowych geometrii, interpretacji operujących prostymi obrazami fizycznymi. Zobaczymy niżej, że i teoria względności ma także wspaniałą interpretację czterowymiarowej, geometrycznej przestrzeni, interpretację operującą już nie prostymi, a bardzo złożonymi fizycznymi obrazami. Nieodzowne jest tutaj podkreślenie, że przestrzeń fizyczna jest przestrzenią materialną. Wszystkie obrazy przestrzeni geometrycznej mają interpretację w przestrzeni fizycznej albo jako materialne obiekty, albo jako materialne oddziaływania między nimi.

Punkty naszej (trójwymiarowej) przestrzeni posiadają określone położenie w przestrzeni, inaczej mówiąc mogą różnić się jeden od drugiego. Arytmetyzujemy tę klasę własności przypisując każdemu punktowi przestrzeni określoną trójkę liczb; każdej trójce liczb będzie odpowiadać jeden i tylko jeden punkt. Taką arytmetyzację nazwiemy krótko arytmetyzacją przestrzeni. Proces arytmetyzacji przestrzeni jest całkowicie dowolny; wybór wspomnianych trójek liczb niczym nie jest z góry ograniczony. Ustalmy w jaki sposób możemy przejść z jednego wybranego sposobu arytmetyzacji przestrzeni do jakiegokolwiek innego sposobu arytmetyzacji. Niech w pierwszym przypadku punktowi przestrzeni P odpowiada trójka liczb x_1, x_2, x_3; a w drugim przypadku temu samemu punktów przestrzeni P będzie odpowiadać inna

[2]Patrz: Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.*

trójka liczb $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Wtedy oczywiście na podstawie znajomości pierwszej trójki liczb można określić drugą trójkę liczb. Dokonując podobnego przyporządkowania dla wszystkich punktów P otrzymamy następujący związek:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Trójki liczb przy pomocy których arytmetyzujemy przestrzeń nazywają się współrzędnymi (uogólnionymi). Przejście do jednego sposobu arytmetyzacji do drugiego nazywa się *przekształceniem współrzędnych.*

2. Jest bardzo ważne, aby z należytą jasnością, uświadomić sobie dowolność arytmetyzacji przestrzeni i nie wiązać jej ustaleniem określonego układu współrzędnych, np. prostokątnych prostoliniowych, biegunowych lub ogólnie krzywoliniowych współrzędnych. W samej rzeczy ustalenie takiego lub innego układu współrzędnych wymaga znajomości własności materii wypełniającej przestrzeń. Np. dla ustalenia prostokątnych prostoliniowych współrzędnych potrzeba znajomości linii prostej. własności prostopadłości i długości oraz długości prostoliniowego odcinka: tak więc potrzeba całego szeregu aksjomatów i wynikających z nich własności. A tymczasem arytmetyzacja przestrzeni nie potrzebuje szczegółowej znajomości jej własności i może być dokonana bez uprzedniego ustalenia charakteru tej przestrzeni. Na załączonych rysunkach (rys. 1 i 2) przeprowadzona została dwoma różnymi sposobami arytmetyzacja przestrzeni (dla prostoty wzięto dwuwymiarową przestrzeń), przy czym nad każdym punktem podano parę cyfr odpowiadających pierwszemu i drugiemu sposobowi arytmetyzacji. Nietrudno, drogą badania, ustalić, że przejście od pierwszej arytmetyzacji (x_1, x_2) do drugiej $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dokonuje się według następujących formuł:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_1 &= \bar{x}_1 \cos \bar{x}_2; \\ \bar{x}_2 &= \arccos \tfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \arcsin \tfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ x_2 &= \bar{x}_1 \sin \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Formuły te reprezentują przejście od współrzędnych prostokątnych prostoliniowych do współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie[3].

[3]Należy zaznaczyć, że wprowadzony przez nas sposób arytmetyzacji płaszczyzny sprowadzający się do zastosowania współrzędnych biegunowych, ma w jednym z punktów

-2,0 | 2,0	-1,0 | 2,0	0,0 | 2,0	1,0 | 2,0	2,0 | 2,0
-2,0 | 1,0	-1,0 | 1,0	0,0 | 1,0	1,0 | 1,0	2,0 | 1,0
-2,0 | 0,0	-1,0 | 0,0	0,0 | 0,0	1,0 | 0,0	2,0 | 0,0
-2,0 | -1,0	-1,0 | -1,0	0,0 | -1,0	1,0 | -1,0	2,0 | -1,0
-2,0 | -2,0	-1,0 | -2,0	0,0 | -2,0	1,0 | -2,0	2,0 | -2,0

Rys. 1

2,8 | 2,4	2,2 | 2,0	2,0 | 1,0	2,2 | 1,1	2,8 | 0,8
2,2 | 2,7	1,4 | 2,4	0,0 | 1,6	1,4 | 0,8	2,2 | 0,5
2,0 | 3,1	1,0 | 3,1	0,0 |	1,0 | 0,0	2,0 | 0,0
2,2 | 3,6	1,4 | 3,9	1,0 | 4,7	1,4 | 5,5	2,2 | 5,8
2,8 | 3,9	2,2 | 4,2	2,0 | 4,7	2,2 | 5,2	2,8 | 5,5

Rys. 2

3. Przestrzeń fizyczna odpowiadająca przestrzeni geometrycznej staje się arytmetyzowalna razem z tą ostatnią. Po dokonaniu arytmetyzacji przy każdym „punkcie" fizycznej przestrzeni podaje się „tablicę" z podanymi na niej trzema cyframi odpowiadającymi danemu punktowi. Tak przywykliśmy do arytmetyzacji przestrzeni fizycznej, że zupełnie nie zastanawiamy się nad tą arytmetyzacją i nie zajmujemy się ani jej słusznością, ani jej dowolnością. Przykładowo, nazwy lub numeracja ulic, domów, pięter, mieszkań ma

(dokładnie w tzw. początku układu współrzędnych) osobliwość. Rzeczywiście, w punkcie $x_1 = 0, x_2 = 0$ formuły określające przejście od x_1, x_2 do $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ nie dają określonej wartości dla $\bar{x}_2$. Założenie, które zrobiliśmy na rys. 2, kładąc (aby lepiej określić) dla wskazanego punktu $\bar{x}_2 = 0$, ma bardzo istotne wady związane z pojęciem ciągłości. Szczegółowe rozważanie omawianego tutaj problemu nie jest możliwe.

własność arytmetyzacji przestrzeni fizycznej zdumiewającej swą dowolnością (szczególnie w miastach powiatowych i Moskwie). Również słupy warstwowe i graniczne albo punkty triangulacyjne też są arytmetyzacją części fizycznej przestrzeni naszej Ziemi. Jeszcze pełniejszą arytmetyzację odzwierciedla układ siatek kartograficznych.

Trzeba zaznaczyć, że arytmetyzacja przestrzeni nie ma niczego wspólnego z mierzeniem, ani nawet z oszacowaniem; podobnie jak nie określamy co oznacza pojęcie większe lub mniejsze w zastosowaniu do określania położenia punktów w przestrzeni.

4. Ustalając przedmioty tworzące przestrzeń i wyjaśniając ich wzajemne związki możemy rozdzielić własności tych przedmiotów przestrzeni na dwie kategorie. Jedna będzie całkowicie zależeć od wyboru arytmetyzacji przestrzeni (zawsze dowolnego), druga zostaje niezmienna jakkolwiek byśmy nie arytmetyzowali tej przestrzeni. Pierwsze przedmioty i własności umówimy się nazywać *niewłaściwymi*, a drugie *właściwymi*. Badając niewłaściwe własności geometrycznej bądź fizycznej przestrzeni, będziemy ustalać dany sposób arytmetyzacji przestrzeni. Dopiero kiedy przejdziemy do własności właściwych, będziemy studiować przestrzeń jako niezależną od dowolnie ustalonej przez nas arytmetyzacji. Z powyższego wynika jak ważne jest dla nas ustalenie właściwych przedmiotów i ich własności w przestrzeni. Nie można jednak myśleć, że badanie niewłaściwych przedmiotów i ich własności jest niepotrzebnym obciążeniem i błędem. Bez znajomości astronomii sferycznej niemożliwe byłoby ustalenie prawa ruchu ciał niebieskich — ale również, między innymi, astronomia sferyczna zajmuje się własnościami niewłaściwymi, określonymi obrazem arytmetyzowanej, fizycznej przestrzeni gwiezdnej.

Własności właściwe przestrzeni mogą być wyrażone określeniami, których forma nie zmienia się przy przejściu od jednej arytmetyzacji przestrzeni do drugiej wg formuł (3). Tego rodzaju warunek mówi, że własności właściwe przestrzeni są *niezmiennicze* względem przekształceń współrzędnych wg formuł (3). W dalszym ciągu zobaczymy jak w naszych formułach i rozważaniach odzwierciedla się pokazana inwariantność własności właściwych przestrzeni.

5. Po zarytmetyzowaniu przestrzeni w ten czy inny sposób, nietrudno jest określić analitycznie krzywą i powierzchnię w przestrzeni. *Krzywą* będziemy nazywać ogół punktów, których współrzędne określone są równościami

$$x_1 = \phi_1(u), \quad x_2 = \phi_2(u), \quad x_3 = \phi_3(u). \tag{4}$$

Natomiast *powierzchnią* będziemy nazywać ogół punktów, których współrzędne określone są przez równania

$$x_2 = \psi_1(u, v), \quad x_2 = \psi_2(u, v), \quad x_3 = \psi_3(u, v), \tag{5}$$

przy czym u, v są dowolnymi zmiennymi. Eliminując z równości (4) parametr u, otrzymujemy równanie krzywej w postaci układu

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Eliminując z równości (5) parametry u, v otrzymamy równanie powierzchni w postaci: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$. Z tego co wcześniej powiedziano wynika, że dwie powierzchnie przecinają się wzdłuż krzywej i że każda krzywa powstaje na przecięciu dwóch powierzchni.

W ten sposób do zdefiniowania pojęcia krzywej i powierzchni potrzeba tylko arytmetyzacji przestrzeni, natomiast nie jest potrzebna znajomość żadnych własności tej przestrzeni. Jest również oczywiste, że postać równań (4) i (5) w istotny sposób zależy od rodzaju arytmetyzacji przestrzeni. Wracając do arytmetyzacji pokazanej na rysunkach 1 i 2 widzimy, że krzywa

$$x_1 = 1, \quad x_2 = u$$

i krzywa

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = u$$

okazują się całkowicie różne jedna od drugiej. Pierwsza w zwykłej geometrii to prosta, druga — okrąg. Nietrudno zauważyć, że własnością krzywej jest posiadanie punktu przestrzeni (przechodzi przez punkt) — jest to własność właściwa. Dokładnie tak samo własnością powierzchni jest posiadanie pewnej krzywej (przechodzi przez krzywą) — jest to również własność właściwa, inwariantna ze względu na przekształcenie współrzędnych.

III. Metryka przestrzeni

1. Dwóm dowolnym punktom przestrzeni P i P' przyporządkujmy specjalną liczbę zwaną *odległością tych punktów*. Liczba ta zostanie całkowicie określona jeśli dane jest położenie punktów P i P', tj. ich współrzędne:

$$(x_1, x_2, x_3) \quad \text{i} \quad (x'_1, x'_2, x'_3),$$

wówczas odległość dwóch punktów P i P' będzie funkcją podanych sześciu liczb (dwóch trójek liczb). Oznaczając liczbę wyrażającą odległość dwóch punktów P i P' symbolem (P, P'), mamy

$$(P, P') = D(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3). \tag{6}$$

Przy tym będziemy uważać odległość za własność inwariantną dwóch punktów. Funkcja D będzie oczywiście zależeć od wyboru współrzędnych, tj. od sposobu arytmetyzacji przestrzeni. Jeśli przy wybranej arytmetyzacji przestrzeni ustalimy funkcję D, to mówimy, że *jest określona metryka przestrzeni.* Jasne jest, że po określeniu metryki dla danego układu współrzędnych nietrudno, przy pomocy formuł (3), określić metrykę dla dowolnego innego sposobu arytmetyzacji przestrzeni.

Wracając do rys. 1 i 2, określimy dla pierwszego sposobu arytmetyzacji dwuwymiarowej przestrzeni odległość punktów

$$P(x_1, x_2) \quad \text{i} \quad P'(x'_1, x'_2)$$

w następujący sposób:

$$(P, P') = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2}.$$

Wtedy dla drugiego sposobu arytmetyzacji dwuwymiarowej przestrzeni będziemy mieć:

$$(P, P') = \sqrt{\bar{x}'^2_1 + \bar{x}^2_1 - 2\bar{x}'_1\bar{x}_1\cos(\bar{x}'_2 - \bar{x}_2)}.$$

Obie formuły dają nam zwykłą (euklidesową) odległość dwóch punktów w prostokątnych prostoliniowych i biegunowych współrzędnych.

2. Trudność badania odległości dwóch punktów zależy przede wszystkim od dużej liczby zmiennych wchodzących w funkcję D. Aby uprościć badanie odległości, rozpatrzmy odległość punktów P' bliskich punktowi P i zobaczymy jak w tym wypadku wyraża się funkcja D. Dostrzeżmy, że w rozważanym wypadku, gdy P' jest blisko P, wyrażenie na odległość tych punktów zależy od współrzędnych punktu P i w prosty[4] sposób zależy od bardzo małych (nieskończenie małych) różnic współrzędnych punktów P' i P. Najpierw jednak rozważmy nie odległość punktów P' i P, kwadrat tej odległości, i ograniczmy się nie do trzech, a do dwóch współrzędnych[5]

[4] Oczywiście w pierwszym przybliżeniu.

[5] W celu uproszczenia wyjątkowo stosujemy przejście do dwuwymiarowej przestrzeni.

$$(P, P')^2 = D^2 = \Delta(x_1, x_2; x_1', x_2').$$

Aby określić funkcję D bądź Δ, należy wprowadzić pewne ograniczenia, które nałożymy na pojęcie odległości. Ograniczenia te, oczywiście będą grać role aksjomatów w tym systemie geometrii który rozwijamy. Załóżmy, że odległość punktów (P, P') będzie posiadać następujące własności:

1. Odległość nie zależy od kolejności występowania punktów: $(P, P') = (P', P), \quad \Delta(x_1, x_2; x_1', x_2') = \Delta(x_1', x_2'; x_1, x_2).$

2. Odległość dwóch pokrywających się punktów (punktów z jednakowymi współrzędnymi) równa jest 0: $(P, P) = 0, \quad \Delta(x_1, x_2; x_1, x_2) = 0.$

3. Kwadrat odległości dwóch dostatecznie bliskich punktów rozwijamy w szereg Taylora różnic współrzędnych punktów

$$\begin{gathered}(x_1, x_2; x_1', x_2') = g_0 + g_1(x_1' - x_1) + g_2(x_2' - x_2) + \\ g_{11}(x_1' - x_1)^2 + g_{12}(x_1' - x_1)(x_2' - x_2) + \\ g_{21}(x_2' - x_2)(x_1' - x_1) + g_{22}(x_2' - x_2)^2 + \ldots,\end{gathered} \tag{7}$$

   gdzie

$$g_0, g_1, \ldots, g_{11}, g_{12}, \ldots$$

   zależą naturalnie od x_1, x_2 (jak w szeregu Taylora).

Ponieważ

$$\Delta(x_1, x_2; x_1, x_2) = g_0$$

wg formuły (7), tona podstawie własności (2) g_0 równa się 0.

Z drugiej strony, przy bardzo małych różnicach:

$$x_1' - x_1, \quad x_2' - x_2$$

człony pierwszego rzędu tych wielkości w formule (7) będą grać główną rolę, o ile g_1, g_2 nie będą jednocześnie równe zeru. Natomiast człony pierwszego rzędu zmieniają swój znak, kiedy zamieniamy miejscami współrzędne. W ten sposób (P, P') i (P', P) dla dostatecznie bliskich między sobą punktów będą różnych znaków, co będzie niezgodne z własnością (1) odległości. Oznacza to, konieczność następującego założenia

$$g_1 = g_2 = 0.$$

Przyjmujemy, że

$$x'_1 = x_1 + \Delta x_1, x'_2 = x_2 + \Delta x_2$$

i zakładamy, że

$$\Delta x_1, \Delta x_2$$

są dostatecznie małe. Mamy wtedy:

$$\Delta = g_{11}\Delta x_1^2 + g_{12}\Delta x_1 \Delta x_2 + g_{21} + \Delta x_2 \Delta x_1 + g_{22}\Delta x_2^2 + \dots$$

Otrzymana formuła dla kwadratu odległości posiada 4 człony, z których dwa są podobne; sumujemy je i zamieniamy $\Delta x_1, \Delta x_2$ na dx_1, dx_2 (wielkości nieskończenie małe). Ostatecznie otrzymamy

$$\Delta = ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2, \tag{8}$$

gdzie $2g_{12}$ zastępuje wyrażenie $g_{12}+g_{21}$. Tak więc g_{ik} są symetryczne względem swoich wskaźników. tj. $g_{ik} = g_{ki}$. Oczywiście g_{ik} zależy od x_1, x_2. Wielkość Δ oznaczamy przez ds^2. Więc ds będzie odległością (w pierwszym przybliżeniu) dwóch nieskończenie bliskich punktów.

Zatem kwadrat odległości dwóch nieskończenie bliski punktów jest kwadratową funkcją nieskończenie małych różnic współrzędnych tych punktów, ze współczynnikami zależącymi od współrzędnych podstawowego punktu. Znaczenie tych trzech współczynników dla dowolnego punktu dwuwymiarowej powierzchni w pełni określa metrykę odległości przestrzeni w bezpośredniej bliskości danego punktu. Można pokazać[6], że wartości tych współczynników umożliwią określenie kwadratu odległości dwóch dowolnych punktów tak aby otrzymać odległość dwóch nieskończenie bliskich punktów jak w wyrażeniu (8). Zauważmy, że badanie odległości w fizycznej przestrzeni będzie opierać się na odległościach bardzo bliskich sobie punktów. Umówmy się nazywać *metrykę przestrzeni określoną z chwilą arytmetyzacji przestrzeni poprzez zadanie g_{ik} jako funkcji współrzędnych punktów przestrzeni.*

Ogół g_{ik}, jako funkcji współrzędnych punktu P, nazywa się *fundamentalnym tensorem metrycznym.*

Dla trójwymiarowej przestrzeni będziemy mieć nie trzy, a sześć współczynników g_{ik} i formułę (8) analogicznie przepiszemy

$$\begin{aligned} ds^2 = \quad & g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 \\ & +2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{31}dx_3dx_1 + 2g_{12}dx_1dx_2. \end{aligned} \tag{9}$$

[6]Nie możemy zatrzymać się nad dowodem tego twierdzenia.

W ten sposób, dla trójwymiarowej przestrzeni fundamentalny tensor metryczny będzie składał się z sześciu funkcji współrzędnych punktu.

3. Wobec nadzwyczajnej ważności pojęcia fundamentalnego tensora metrycznego rozpatrzmy go dla wyżej określonej odległości w dwóch pokazanych wcześniej sposobach arytmetyzacji dwuwymiarowej przestrzeni.

Dla pierwszego sposobu mamy

$$\Delta = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2,$$

inaczej mówiąc:

$$g_0 = 0, g_1 = 0, g_2 = 0, g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{21} = 0,$$

$$g_{22} = 1, ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2.$$

Otrzymujemy zwykłe formuły geometrii analitycznej dla kwadratu odległości i dla kwadratu elementu łuku.

Nieco bardziej złożone są rachunki dla arytmetyzacji drugim sposobem. Nie przytaczając tych rachunków zauważmy, że dla drugiego sposobu arytmetyzacji

$$\bar{g}_0 = 0, \bar{g}_1 = 0, \bar{g}_2 = 0, \bar{g}_{11} = 1, \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0, \bar{g}_{22} = \bar{x}_1^2,$$

$$ds^2 = d\bar{x}_1^2 + x_1^2 d\bar{x}_2^2,$$

w której to formule rozpoznajemy element długości we współrzędnych biegunowych.

4. Zupełnie jasne jest, że znając Δ lub ds dla dowolnych punktów nieskończenie mało różniących się od punktu P, będziemy znać fundamentalny tensor metryczny w punkcie P. Wówczas możemy za pomocą fundamentalnego tensora metrycznego, określić długość łuku zadanego krzywą między dwoma punktami P_1 i P_2. Umieśćmy między P_1 i P_2 na krzywej nieskończenie wiele punktów i zsumujmy wzajemne ich odległości. W rezultacie otrzymamy liczbę, którą nazwiemy długością łuku krzywej miedzy punktami P_1 i P_2. Posługując się zwykłymi formułami rachunku całkowego, będziemy mieć dla długości łuku krzywej między punktami P_1 i P_2: S_{P_1,P_2} następujące wyrażenie

$$S_{P_1,P_2} = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 + \dots}\, du, \tag{10}$$

gdzie u_1, u_2 — wartości parametru u dla punktów P_1 i P_2.

5. Popatrzmy w jaki sposób badanie fizycznej przestrzeni może nam wskazać (przynajmniej w zasadzie) jaka jest zależność fundamentalnego tensora metrycznego od współrzędnych punktów oraz jaka jest metryka odległości geometrycznej przestrzeni odpowiadającej naszej fizycznej przestrzeni, dla której zatem nasza przestrzeń fizyczna jest jej interpretacją. Załóżmy, że wprowadzamy dla naszych fizycznych „punktów” leżących na fizycznej krzywej, odrębną własność posiadania przez nie fizycznej odległości wzdłuż krzywej. Przyjmijmy, że za pomocą określonych, fizycznych procedur początkowo przenosimy tę własność w kategorię własności stopniowalnych, a więc i mierzalnych własności stopniowalnych. Przypomnijmy, że należy ustalić pojęcie większe albo mniejsze oraz równoodległych własności stopniowalnych w odniesieniu do fizycznej odległości wzdłuż krzywej. Załóżmy dalej, że w drodze wyboru określonej wartości początkowej i jednostki pomiaru, mierzymy wprowadzoną przez nas własność stopniowalną. Rezultatem pomiaru będzie pewna liczba, którą nazwiemy *długością fizyczną łuku wzdłuż danej krzywej między punktami* P_1 *i* P_2. Jeśli fizyczna długość łuku jest interpretacją określonej wyżej w punkcie 4 geometrycznej długości łuku (albo prościej długości łuku) to oczywiście obie liczby dające geometryczną i fizyczną długość łuków, powinny (przynajmniej przy pewnym wyborze wartości początkowej i jednostki pomiaru) pokrywać się ze sobą. Jeśli geometryczna długość łuku między dwoma pokrywającymi się punktami jest równa zeru (wg własności całki (10)), to oczywiście za wartość początkową powinna być wybrana fizyczna długość łuku między dwoma pokrywającymi się punktami. Wybór jednostki pomiaru nie może być niczym ograniczony[7].

[7]Dowolność wyboru jednostki pomiaru jest nadzwyczaj charakterystyczna. Weyl korzysta z niej dla wprowadzenia osobnego pojęcia dowolności skali. Mierząc fizyczną długość możemy posługiwać się dowolną i przy tym zmieniającą się od punktu do punktu jednostką pomiaru.

Nasuwa się pytanie przy jakiej jednostce pomiaru długość fizyczna będzie identyczna z długością geometryczną? Jeśli to pytanie pozostanie bez odpowiedzi (w gruncie rzeczy często tak dzieje się, ponieważ jednostka pomiaru zależy od naszego wyboru) to długość fizyczną określa nie ds, dla $\mu(x_1, x_2, x_3)ds$, gdzie μ jest nieokreśloną funkcją współrzędnych. Istnieją własności przestrzeni, na które dowolność μ nie ma wpływu. Mówimy, że własności te są niezmiennicze względem zmiany skali (*inwariantność skalowania*). Grają one poważną rolę w teorii Weyla. Jednak nie będziemy zatrzymywać się na pytaniu o inwariantność skalowania ponieważ przeładowałoby to nasz artykuł nowymi pojęciami i terminami, które będą pozbawione określonej treści, jeśli nie zostaną poparte odpowiednim aparatem matematycznym bądź przykładami.

Załóżmy teraz, że przez dany fizyczny punkt P przeprowadzimy szereg krzywych i na każdej z nich obierzemy punkt P' bliski punktowi P. Mierząc fizyczną długość łuku na każdej z tych krzywych między punktem P, a punktem nieskończenie mu bliskim, otrzymamy szereg liczb $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots$, które będzie można utożsamić z odpowiadającymi im geometrycznymi długościami łuków. Gdy łuki są bardzo małe, to ich długości można utożsamiać z odległościami bardzo bliskich punktów i odległości te można wyliczyć z formuły (9) zamieniając w niej dx_1, dx_2, dx_3 na bardzo małe wielkości $\Delta x_2, \Delta x_2, \Delta x_3$ przedstawiające różnice współrzędnych punktów P' i P. W formule (9) nie będziemy znać wielkości g_{ik}, ale za to znamy $\Delta x_2, \ldots$, a także lewe strony otrzymanych równań. Po wykonaniu dostatecznie dużej liczby pomiarów będziemy w stanie ustalić dostateczną liczbę równań, z których wyznaczymy g_{ik}. Dla przestrzeni trójwymiarowej potrzebujemy oczywiście nie mniej niż sześć pomiarów, a dla przestrzeni dwuwymiarowej nie mniej niż trzy pomiary.

6. Aby proces fizycznego badania metryki stał się jaśniejszy rozpatrzmy go szczegółowo dla przypadku dwuwymiarowej przestrzeni. Dopiero co widzieliśmy, że potrzebne są trzy pomiary. W ten sposób wybierzemy prócz punktu P, jeszcze trzy punkty P_1, P_2, P_3 bardzo mu bliskie. Dokonawszy pomiarów określimy trzy odległości (bardzo małe długości łuków krzywych) s_1, s_2, s_3 punktu P od punktów P_1, P_2, P_3. Dla wyznaczenia metryki przestrzeni będziemy potrzebować przestrzeni zarytmetyzowanej — wybierzmy więc jakiś dowolny sposób arytmetyzacji. Niech przy tym sposobie punkt P ma współrzędne (x_1, x_2), a punkty P_1, P_2, P_3 mają współrzędne $(x_1 + h_1, x_2 + k_1), (x_1 + h_2, x_2 + k_2), (x_1 + h_3, x_2 + k_3)$. Wtedy formuła (8) da nam trzy równości

$$
\begin{aligned}
s_1 &= g_{11}h_1^2 + 2g_{12}h_1k_1 + g_{22}k_1^2,\\
s_2 &= g_{11}h_2^2 + 2g_{12}h_2k_2 + g_{22}k_2^2,\\
s_3 &= g_{11}h_3^2 + 2g_{12}h_3k_3 + g_{22}k_3^2.
\end{aligned}
$$

Rozwiązując ten układ równań względem g_{11}, g_{12}, g_{22} określimy metrykę przestrzeni. Można go rozwiązać gdy punkty nie pokrywają się jeden z drugim; na tym detalu niestety nie mogę się dłużej zatrzymać. Dopiero co opisane zagadnienie, znano już w Egipcie kiedy życie codzienne i potrzeby religijne wyznaczały podstawy naszej euklidesowej metryki. Wyobraźmy sobie przez chwilę, że nienaturalnie spłaszczyliśmy się i podobni do powierzchniowych cieni żyjemy na wielkiej kuli[8]. Przyjmijmy, że przechodząc w dwuwymiarową egzystencję cieni umiemy mierzyć wszystkie fizyczne długości łuków. Załóżmy też, że dla arytmetyzacji naszej dwuwymiarowej przestrzeni (powierzchni kuli) przyjmujemy następujący sposób liczenia: wprowadzamy znanym sposobem dopełnienie do 90^o szerokość ϕ i długość λ na naszej kuli o promieniu R. Więc dla dowolnego punktu P wybieramy dwie liczby x_1 i x_2 wg formuły $x_1 = R, x_2 = R(\sin\phi_0)\lambda$, gdzie ϕ_0 jest dopełnieniem do $90°$ szerokości pewnego punktu $P_0(x_{10} - R\phi_0)$, w otoczeniu którego przeprowadzamy obserwacje. Załóżmy, że cały szereg przeprowadzonych dokładnie pomiarów dał nam następujące wyrażenie

$$ds^2 = dx_1^2 + \frac{\sin^2 \frac{x_1}{R}}{\sin^2 \frac{x_{10}}{R}}\, dx_2^2$$

Formuła ta jak łatwo zauważyć okazuje się zwykłą formułą wyrażającą długość nieskończenie małego łuku na sferze: $ds^2 = R^2 d\phi^2 + R^2 \sin^2 \phi d\lambda^2$. Jeśli promień sfery jest nieduży w porównaniu z obszarem zamieszkałym przez cienie, to otrzymana formuła przy dostatecznej liczbie pomiarów, da wkrótce tamtejszym geometrom możliwość określenia R, to jest promienia sfery w różnych punktach świata cieni. W ten sposób mogą cienie znacząco powiększyć swoją wiedzę o dwuwymiarowej przestrzeni, którą zajmują. Praca naszych cieni znacznie pogarsza się jeśli zajęty przez nie cienie obszar będzie bardzo mały w stosunku do promienia R sfery. Wtedy stosunek $\frac{\sin^2 \frac{x_1}{R}}{\sin^2 \frac{x_{10}}{R}}$ będzie bliski 1, albowiem x_1 dąży do x_{10}, to jest $x_1 - x_{10}$ będzie bardzo małe w porównaniu z R (wszystko dziać się będzie tak, jak gdyby $R = \infty$ i sfera przechodzi w płaszczyznę). Nasze sferyczne cienie skłonne będą poddawać nagonce wolnomyślicieli, którzy kwestionują to, że ich przestrzeń nie jest płaszczyzną, a okazuje się sferą, tylko sferą o dużym promieniu. Potrzeba wielu sferycznych wieków, żeby tłum cieni pojął sferyczność swojego świata. My — istoty trójwymiarowe znajdujemy się w analogicznym położeniu jak dwuwymiarowe cienie żyjące na sferze o bardzo dużym promieniu, ponieważ wszystkie nasze pomiary nieustannie upewniają nas o doskonałej zgodzie metryki naszej przestrzeni z metryką euklidesową. Potrzebne były ogromne astronomiczne odległości albo takie idee, które wniosła ze sobą teoria względności, abyśmy poddali w wątpliwość zagadnienie metryki naszej przestrzeni.

[8]To porównanie przedstawił na jednym ze swoich, jak zwykle znakomitych, popularnych wykładów z zasady względności prof. O. D. Chwolson.

7. Okazuje się, że badając naszą fizyczną przestrzeń i fizyczną długość mamy możliwość, bez jakiejkolwiek dowolności, jednoznacznie oceniać metrykę tej geometrycznej przestrzeni, obrazem której (interpretacją) okazuje się badana przez nas fizyczna przestrzeń, Nie można nie dostrzegać całego szeregu zależności wprowadzonych przez nas kiedy z jednej strony interpretujemy przestrzeń geometryczną i jej obrazy przy pomocy obrazów przestrzeni fizycznej, a z drugiej strony gdy utożsamiamy długość fizyczną z długością geometryczną.

W fizycznej, materialnej przestrzeni interpretujemy punkty geometryczne za pomocą takich lub innych obiektów materialnych. Zadowalając się grubą interpretacją „wyobrażamy sobie” punkty za pomocą małych materialnych ciał rozłożonych w naszej fizycznej przestrzeni (porównajmy punkty na papierze, znaki geodezyjne na powierzchni Ziemi i w końcu dla dużych obszarów przestrzeni — ciała niebieskie). Interpretując je bardzo precyzyjnie, określamy je jako miejsca przecięcia dwóch dostatecznie wąskich wiązek świetlnych, tzn. przy pomocy bardzo cienkich ale materialnych obiektów. Możemy jednak interpretować geometryczne punkty całkiem innymi obrazami materialnego świata i przy takiej interpretacji otrzymać nawet w wąskich, dostępnych nam obszarach fizycznej przestrzeni zupełnie inne wyobrażenia o jej geometrycznych własnościach, poprawniej o własnościach geometrycznej przestrzeni, którą interpretuje się jako przestrzeń fizyczną.

Jeszcze większa dowolność jest w zdefiniowaniu fizycznej długości. Biorąc celowo pod uwagę różne punkty widzenia zauważamy, że możliwe są różnorodne metody zdefiniowania fizycznej długości. Tym samym możliwe są różnorodne metody określenia metryki tej przestrzeni, interpretacją której jest nasza przestrzeń fizyczna. Interpretując punkt geometryczny w nietradycyjny sposób w naszej przestrzeni fizycznej, przyjmując szczególne pojęcie fizycznej długości, eksperymentalnie ustalimy bez żadnego kłopotu, że metryka naszej przestrzeni to nie metryka Euklidesa, lecz Łobaczewskiego bądź jakaś inna.

W ten sposób trzeba wreszcie odrzucić możliwość jednoznacznej i niezależnej od dowolności naszego wyboru, odpowiedzi na pytanie o metrykę (a równocześnie i inne własności) geometrycznej przestrzeni odpowiadającej naszej fizycznej przestrzeni, to pytanie na ogół staje się zrozumiałe po ustaleniu interpretacji przedmiotów geometrycznej przestrzeni za pomocą fizycznych, materialnych obrazów, a równocześnie gdy określono długość fizyczną i założono identyczność długości fizycznej z geometryczną. Raz to już zostało ustalone, teraz tylko powstaje pytanie o określenie metryki przestrzeni. Zadanie geometry — przyrodnika zamyka się w ustaleniu bardzo dokładnych metod badania metryki przestrzeni, pozwalających mniej dokładnymi metodami niż opisane w poprzednich punktach ustalić tę metrykę. Zwróćmy uwagę, że uwzględnienie zasady względności i powszechnego ciążenia pozwoliło w tak wtedy trudnych do objaśnienia i szczegółowych zjawiskach jak ruch peryhelium Merkurego lub odchylenie promienia świetlnego przechodzącego w pobliżu powierzchni Słońca, dojść do szeregu wniosków dotyczących metryki naszej przestrzeni.

Naturalnie powstaje pytanie czym jest uwarunkowana ta czy inna fizyczna interpretacja geometrycznej przestrzeni i przedmiotów w niej znajdujących się? Tu prawdopodobnie niejasne zasady racjonalności bądź ekonomia myślenia grają pierwszorzędną rolę — nie będę próbował zajmować się tymi pytaniami, również ze względu na temat następnego artykułu. Przyjmujemy jako coś gotowego tę interpretację geometrii do której przywykli fizycy[9]. Zadawszy pytanie o fizyczną przestrzeń wydaje mi się pożytecznym zwrócić uwagę na to, że przestrzeń fizyczna jako przestrzeń materialna w samej istocie jest nie do pomyślenia bez materii. Pusta fizyczna przestrzeń jest nonsensowna bo w takiej przestrzeni nie będzie sobie można wyobrazić, interpretować, ani jednego z przedmiotów geometrycznej przestrzeni — przecież w fizycznej przestrzeni umówiliśmy się interpretować przedmioty przestrzeni geometrycznej jako *obrazy materialne*.

Tłumaczyli: *Jadwiga i Zdzisław Goldowie*

[9]Np. bardzo małe ciało materialne jest interpretacją (ze znanym przybliżeniem) punktu geometrycznej przestrzeni. (Promień świetlny interpretujemy jako prostą itp.).