ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
VIII / 1986, s. 20–39*

Michał HELLER

Kilka uwag o filozofii matematyki Hermanna Weyla

„So far, only in mathematics and physics has symbolical–theoretical construction gained that solidity which makes it compelling for everyone whose mind is open to these sciences. Their philosophical interest is primarly on this fact".

H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science.*

0. Wprowadzenie

Herman Weyl (1885–1955) należy do klasyków tego rodzaju literackiego, który nazwałbym wyławianiem filozoficznych tematów w naukach. Taką pozycje zapewniły mu głębokie komentarze filozoficzne bogato rozsiane w jego pracach z zakresu matematyki i fizyki i, przede wszystkim, niewielkich rozmiarów książka zatytułowana *Philosophy of Mathematics and Natural Science.* Początki książki sięgają roku 1926, kiedy to Weyl napisał obszerny artykuł do *Handbuch der Philosophie*, redagowanego przez R. Oldenbourga. Po ponad dwudziestu latach artykuł został nieco rozszerzony, miejscami zmodyfikowany, przetłumaczony na język angielski i wydany w postaci książki (przez Princeton University Press, 1949). Weyl uzupełnił książkę sześcioma esejami, w postaci appendiksów, uwzględniającymi nowe osiągnięcia nauk.

Mam przed sobą wydanie z roku 1963 (przez Atheneum, New York). Nie zamierzam pisać ani recenzji książki Weyla, ani tym bardziej monograficznego artykułu na jej temat. Po prostu czytam uważnie, z ołówkiem w ręku. Zakreślam i wynotowuję miejsca, które mnie z jakichś względów

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

zainteresowały. Bez specjalnego planu, na zasadzie mniej lub bardziej chwilowego rezonansu mojej myśli z myślą autora. Wynikiem rezonansu mogą być strzępy jakiejś melodii, lub może raczej kawałki materii, z których może kiedyś da się stworzyć melodie. Niektóre z tych kawałków postaram się zanotować poniżej.

Tego rodzaju taktyka jest usprawiedliwiona także i tym, że książka mimo wszystko jest stara. Znaczne jej partie są poświęcone wykładowi pojęć i teorii, które już dziś stanowią materiał podręcznikowy (chociaż niekiedy pochodzący od samego Weyla, jak na przykład pojęcie rozmaitości różniczkowalnej). Nawet w uzupełnieniach, dodanych do wydania książkowego, niekiedy daje się odczuć, że zostały napisane z punktu widzenia mijającego paradygmatu (tak na przykład Weyl ciągle jeszcze nie może w pełni docenić twierdzeń Gödla, Appendix A). Myślę jednak, że filozoficzne komentarze Weyla i jego penetrujące do głębi, choć często rzucane mimochodem, uwagi nie zestarzeją się jeszcze bardzo długo. Ze wszech miar warto poświęcić im nieco myślowego wysiłku.

Książka Weyla składa się z trzech części: pierwsza jest poświęcona filozofii matematyki, druga filozofii nauk przyrodniczych, trzecia metodologii. W niniejszym szkicu ograniczę się jedynie do refleksji nad wybranymi fragmentami pierwszej części.

1. Niewyczerpalność — wyzwanie rzucone racjonalności

Najpierw kilka słów na temat ogólnego stanowiska Weyla w filozofii matematyki, przynajmniej tak jak się ono ujawnia w *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. A nie jest to stanowisko jednoznaczne. Weyl jest przede wszystkim zafascynowany matematyczną *ars combinatoria* — ulubione wyrażenie Leibniza, a za nim Weyla, mające oddawać tę przedziwną własność matematycznych wnioskowań, dzięki której wnioskowania daje się zamienić w „grę symbolami". Dla Weyla najczęściej podziwianym „bohaterem filozofii" jest Leibniz, myśliciel, „który posiadał wnikliwe oko dla tego, co jest istotne w matematyce" i dla którego „matematyka stanowiła organiczną i znaczącą składową jego filozoficznego systemu" (s. 2)[1]. Nic dziwnego, te Leibnizowska *mathesis universalis* jest dla Weyla przedmiotem tęsknoty.

[1]Strony w nawiasach zawsze odnoszą się do książki Weyla *Philosophy of Mathematics and Natural Science.*

W filozofii matematyki pierwszych dziesiątków lat naszego stulecia istniały dwie drogi, po których można było dążyć do ideału Leibniza. Intuicjonizm Brouwera i symbolizm Hilberta. Weyla często posądza się o to, że w filozofii matematyki był intuicjonistą. Wydaje się, iż tym, co najbardziej pociągało Weyla w programie Brouwera, była nadzieja, że wszystko w matematyce da się osiągnąć przy, pomocy skończonych konstrukcji. Weyla zawsze pasjonował problem stosunku matematyki do fizycznej rzeczywistości, a założenie, że fizyczny świat jest czymś w rodzaju maszyny o ściśle określonej konstrukcji, było jeszcze wciąż bardzo żywym dziedzictwem dziewiętnastego wieku. Jednakże, mimo wszystko, mechanicyzm w fizyce załamał się na oczach Weyla, a on sam był zbyt dobrym matematykiem, by nie widzieć, jak małe szanse mechaniczne konstrukcje mają w dziedzinie czystej matematyki. Pod koniec paragrafu, omawiającego intuicjonizm, Weyl napisał: „Matematyka, dzięki Brouwerowi, osiąga swoją najwyższą intuicyjną jasność. Udało mu się rozwinąć początki analizy w naturalny sposób, cały czas zachowując znacznie ściślejszy kontakt z intuicją niż się to komukolwiek przedtem udało. Nie można jednak zaprzeczyć, że przechodząc do wyższych i coraz bardziej ogólnych teorii, niemożność zastosowania prostych praw logiki klasycznej staje się przeszkodą nie do zniesienia. Matematyk przygląda się, pełen cierpienia, jak większa cześć jego wyniosłej budowli, o której sądził, że jest zbudowana z betonowych bloków, rozwiewa się na jego oczach w nieuchwytną mgiełkę" (s. 54).

A zatem formalizm (czy symbolizm) Hilberta? Owszem i to podejście jest bliskie filozoficznym tęsknotom Weyla. Gdyby Leibniz mógł zająć stanowisko w tym sporze, to najprawdopodobniej opowiedziałby się za Hilbertem a przeciw Brouwerowi. W Hilbertowskim programie osiąga się absolutną powszechność matematycznej gry (a jest, to gra — zauważa Weyl znacznie bardziej bawiąca niż szachy, por. s. 61) i tylko cena, jaką trzeba zapłacić, jest całkowita pustka, bezznaczenie symboli, którymi się żongluje. Ale i tu Weyl ma poważne obiekcje, również rodzące się w kontekście refleksji nad stosunkiem świata matematyki do świata fizyki. Pisze on: „[...] trzeba zwrócić uwagę na zasadniczo historyczny charakter tej sfery umysłu, której integralną — choć nie autonomiczną — częścią jest moje własne istnienie. Jest ona światłem i cieniem, czymś przygodnym i koniecznością, przymusem i wolnością i nie można oczekiwać, że da się z niej kiedyś wyprowadzić symboliczna konstrukcję świata w ostatecznej postaci" (s. 62).

Jednakże śmiertelny cios programowi Hilberta został wymierzony nie przez rozważania filozoficzne, lecz przez konkretne osiągnięcia w dziedzinie podstaw matematyki. Weyl nie waha się nazwać słynnych twierdzeń Gödla z 1931 r. katastrofą (s. 61). Gdyż była to istotnie katastrofa dla wszelkich nadziei na zredukowanie matematyki do intuicyjnie przejrzystych konstrukcji lub do czysto mechanicznego manewrowania pustymi symbolami. Od czasów pracy Gödla — pisze Weyl — zapanował nastrój rezygnacji. I dalej: „Ostateczne podstawy i ostateczny sens matematyki pozostają otwartym zagadnieniem; nie wiemy, w jakim kierunku trzeba szukać rozwiązania, ani nawet czy rozstrzygającej i obiektywnej odpowiedzi można w ogóle oczekiwać. 'Matematykowanie' równie dobrze może być twórczą działalnością człowieka, jak muzyka, działalnością której produkty nie tylko tworzą decyzje historii, ale są również przez te decyzje substancjalnie warunkowane i dlatego też wymykają się zupełnej i obiektywnej racjonalizacji" (Appendix A, s. 219).

Weyl widzi dalsze konsekwencje powrotu Gödla. Z jednej bowiem strony „idea transcendentalnego świata, istniejącego i zupełnego w sobie, jest przewodnią zasadą w budowaniu naszego formalizmu", z drugiej zaś strony, „formalizm ten na każdym ustalonym etapie jego wznoszenia, ma charakter niezupełności, w tym sensie, że zawsze są problemy prostej arytmetycznej natury, które można postawić wewnątrz formalizmu i rozstrzygnąć przez wgląd w nie, ale których nie da się rozstrzygnąć przez dedukcje wewnątrz formalizmu" (tamże, s. 219–220). I znowu, nie o samą czystą matematykę tu idzie. „Nie jesteśmy zaskoczeni — pisze dalej Weyl — że konkretna bryła przyrody, wzięta w swoim odrębnym, zjawiskowym istnieniu, rzuca wyznanie naszej analizie swoja niewyczerpalnością i niezupełnością; bo właśnie w imię swojej zupełności — jak widzieliśmy — fizyka rzutuje to, co jest dane na tło wszystkich możliwości. Ale jest rzeczą zaskakującą, że konstrukcja stworzona przez sam umysł, ciąg liczb całkowitych, najbardziej przezroczysta ze wszystkich rzeczy, dla konstruującego umysłu, przyjmuje podobny aspekt niejasności i braku, gdy się na nie spogląda z tego aksjomatycznego punktu widzenia" (s. 22). Rzecz ciekawa: dla Weyla liczby naturalne są, w pewnym sensie, bardziej realne (choć skonstruowane przez umysł) niż przyroda. Niewyczerpalność przyrody nie budzi niepokoju; przyroda ma wprawdzie konkretne, indywidualne istnienie, ale chcąc ją zrozumieć, musimy ją rzutować na nieskończone pole możliwości. Ale odnaleźć niewyczerpalność w czymś tak „prostym" jak ciąg liczb naturalnych [...] to wydaje się Weylowi wyzwaniem rzuconym racjonalności.

W świetle tych uwag nieco dziwi uwaga Weyla, że nie ma wiele do dodania do tego, co napisał na ten temat w 1926 r., że co najwyżej niektóre swoje sformułowania wyważałby nieco ostrożniej (Appendix, s. 219). Czy Weyl liczy na cofnięcie się historii? Na jakiś nieprzewidziany zwrot w interpretacji twierdzeń Gödla? Weyl dostrzega paralele między twierdzeniami Gödla a paradoksami greckich matematyków z Elei. Paradoksy z czasem przezwyciężono przy pomocy analizy matematycznej, potem odżyły one w podstawach matematyki i znowu Russell poradził sobie z nimi przy pomocy swojej teorii typów a Zermelo przy pomocy swojej aksjomatyki teorii mnogości. „Paradoksy Gödla" są o tyle groźniejsze, że kwestionują skuteczność samej metody, która miała raz na zawsze „twórczość" zastąpić „mechanicznym rachunkiem". Czy jest to już ostateczny werdykt? Pytań tych Weyl wprost nie stawia, ale można je wyczuć między wierszami. Nie są to pytania czysto akademickie, są to „egzystencjalne pytania nauki".

2. Magia liczb

„Liczby całkowite zostały stworzone przez Boga, wszystko inne jest dziełem człowieka". Weyl cytuje to, często powtarzane powiedzenie Kroneckera, gdyż wprowadza ono w samo sedno zagadnienia. „W dziedzinie liczb naturalnych — pisze Weyl — problem poznania ukazuje się nam w swojej najprostszej postaci" (s. 33). To, co w innych dziełach nauki jest skomplikowane i uwikłane w związki z innymi obszarami wiedzy, tu występuje w całej swojej pierwotnej prostocie. Ale i w całej powadze zagadnienia. Chociażby sygnalizowany już w poprzednim paragrafie Gödlowski problem zupełności arytmetyki.

Zacznijmy od ciekawej uwagi Weyla. Każda liczba posiada swoją niepowtarzalną indywidualność. Tylko czwórka, i żadna inna liczba, jest sumą dwóch dwójek. „Tajemnica związana z liczbami, ta magia liczb, wywodzi się, być może, właśnie z tego faktu, że intelekt tworzy, w postaci ciągu liczb, nieskończoną rozmaitość dobrze odróżnialnych indywiduów. Nawet my, oświeceni naukowcy, wyczuwamy to jeszcze ciągle, np. w niezbadanym prawie rozkładu (w ciągu wszystkich liczb) liczb pierwszych" (s. 7).

Warto te zastanawiającą własność liczb skontrastować z własnościami punktów w przestrzeni. Punkty w przestrzeni nie posiadają indywidualności. „Każda własność wyprowadzona z podstawowych relacji geometrycznych, bez odwoływania się do konkretnych punktów linii lub płaszczyzn, jeżeli odnosi się do jakiegoś punktu, odnosi się do wszystkich innych punktów. Ta podstawowa jednorodność decyduje o intuicyjnie rozumianej jednorodności przestrzeni" (s. 7–8). Ale wystarczy umownie zindywidualizować choćby jeden punkt w przestrzeni, np. wyróżnić początek układu odniesienia, a natychmiast wszystkie inne punkty nabierają indywidualności, przestrzeń zostaje zarytmetyzowana, niepowtarzalność jednostki przenosi się z arytmetyki na geometrię[2].

Indywidualność liczb naturalnych jest ściśle związana z możliwością ich definiowania za pomocą definicji indukcyjnych. „Każda liczba zakłada liczby ją poprzedzające jako racje swojego istnienia” — przypomina Weyl powiedzenie Schopenhauera (s. 34). Dlatego też Weyl uważa za pierwotniejsze liczby porządkowe niż główne i z sympatią odnosi się do opinii tych matematyków, którzy wiążą ciąg liczb rzeczywistych z intuicja upływania czasu; aczkolwiek sądzi, te wiązanie arytmetyki z czasem tak jak się wiąże geometrię z przestrzenią, i jak tego domagał się Kant, byłoby przedsięwzięciem zbyt śmiałym (por. s. 36–37).

Predylekcja Weyla do definicji indukcyjnych, czyli do przechodzenia w uporządkowanym ciągu od jednego elementu do następnego, niewątpliwie odpowiada jego nostalgii za prostą, finitystyczną matematyką, w której wszystko dałoby się osiągnąć za pomocą skończonej ilości kroków dowodowych. W takim ujęciu można by mówić — tu Weyl przytacza powiedzenie J. Friesa — o „pierwotnym zaciemnieniu rozumu” (*primordial obscurity of reason*), które polega na tym, że „my nie posiadamy prawdy, prawda chce, byśmy ją osiągnęli działaniem” (ss. 15–16). Po twierdzeniach Gödla powinniśmy dodać, że jednak prawda woli, byśmy jej szukali (i nigdy nie osiągnęli!) nie całkiem formalnymi środkami.

Ale dotychczas nie powiedzieliśmy jeszcze słowa o najważniejszej sprawie: czy liczby się odkrywa, czy się je tworzy? Weyl wolałby powiedzieć, że się konstruuje lub że są one tylko symbolami, „których kształt jest przez nas rozpoznawalny z pewnością, niezależnie od czasu i miejsca, od szczególnych warunków ich sporządzenia i od drobnych różnic w ich wykonaniu” (Hilbert, s. 35). Kopiują się tu wszystkie trudności intuicjonizmu i symbolizmu. Czyżby więc należało przyjąć istnienie liczb (jak to robił sam Gödel) jako

[2]W związku z tym przypomina mi się argument Ellisa, którego zdaniem w przestrzennie nieskończonym wszechświecie każdy z nas musiałby mieć nieskończenie wiele bliźniaków, gdyż w nieskończonej przestrzeni każda, nawet najmniej prawdopodobna konfiguracja, musi się powtarzać dowolną ilość razy (por. G. F. R. Ellis, *Relativistic Cosmology: Its Nature, Aims and Problems*, w: *General Relativity and Gravitation*, red: B. Bertotti in F. de Felice i A. Pascolini, Reidel, 1984, ss. 215–288, przytoczona argumentacja na s. 262). Przykład liczb pokazuje, że tak wcale być nie musi. Można by zaryzykować „ontologiczne” twierdzenie: w zbiorze indywidualizowanych przedmiotów każde indywiduum jest niepowtarzalne. Przykład liczb pokazuje, że w każdym razie tak może być: Innymi kandydatami na unikalność we wszechświecie byłyby wydarzenia historyczne, jednostki ludzkie, etc.

idealnych ale rzeczywistych obiektów, niezależnych od tego, czy ktokolwiek o nich myśli, czy nie? W takim ujęciu „system liczb staje się królestwem absolutnych istnień które są 'nie z tego świata' i których odblaski tu i ówdzie bywają złapane i odbite w naszej świadomości" (s. 38). Weyl dostrzega tę możliwość, ale odnosi się do niej z rezerwą. „Jeżeli ktoś chce mówić, mimo wszystko, o liczbach jako pojęciach lub idealnych obiektach, w każdym razie musi powstrzymać się od przypisywania im niezależnego istnienia; ich istota wyczerpuje się w funkcjonalnej roli, jaką spełniają i w ich relacjach mniejszości i większości" (s. 36). A więc jeżeli liczby istnieją obiektywnie, to nie jak krzesła czy kamienie, ale raczej jak elementy dzieła sztuki, które są tylko o tyle, o ile spełniają swoje funkcje w całości.

3. Wiedza nieskończoności

Niezależnie od wszelkich sporów dotyczących podstaw matematyki Weyl ma jej swoją własną, „roboczą" definicję: *matematyka to wiedza o nieskończoności*. „Gdyby trzeba podać jakiś krótki zwrot, który miałby scharakteryzować ośrodek życia matematyki, należałoby powiedzieć: matematyka jest *nauką o nieskończoności*" (s. 66). Za wielkie osiągnięcie Greków Weyl uważa z „napięcia pomiędzy skończonym i nieskończonym uczynili oni tak skuteczne narzędzie analizowania rzeczywistości" (s. 66). Cytat z Hilberta jest potwierdzeniem tego poglądu: „Nieskończoność pisze Hilbert — jak żaden inny problem — zawsze głęboko poruszał ludzkie dusze. Nieskończoność, jak żaden inny problem, wywierał płodny wpływ na umysł. Ale nieskończoność, również jak żadne inne pojęcie, domaga się rozjaśnienia" (s. 66). To domaganie się jest siłą napędową matematyki.

Nieskończoność w matematyce ma różne i wielorakie oblicza. Niemal w każdym dziale matematyki nieskończoność odsłania inne i, zdawałoby się, coraz bardziej zaskakujące swoje aspekty. Trzeba jednak zacząć od teorii mnogości, która — wedle ogólnie przyjmowanego podejścia — jest najściślej związana z podstawami matematyki.

W teorii mnogości za nieskończony uważa się zbiór A, taki że istnieje jednojednoznaczne odwzorowanie zbioru na jakiś jego właściwy podzbiór B. Czyli aksjomat: część jest mniejsza od całości. Na przykład zbiór liczb naturalnych N jest nieskończony, ponieważ istnieje wzajemne jednoznaczne odwzorowanie zbioru N na zbiór P naturalnych liczb parzystych; odwzorowanie to określa następująca prosta recepta: $n \to 2\ n$, gdzie n należy do N. Jeżeli nie da się określić tego rodzaju odwzorowania, zbiór uważa się za skończony. Weyl zauważa, że w takim ujęciu zbioru skończonego jest wtórne w stosunku do pojęcia zbioru nieskończonego i przypomina pogląd Kartezjusza, dla którego również nieskończoność była pierwotniejsza od skończoności (s. 47).

Zdaniem Weyla teoria mnogości rozstrzyga, sięgający jeszcze Arystotelesa, spór o istnienie aktualnej, nieskończoności. Weyl pisze: „Oto istota teorii mnogości: rozważa ona nie tylko zbiór liczb, ale również całość jego wszystkich podzbiorów jako zamkniętą klasę obiektów istniejących w sobie. W tym sensie bazuje ona na aktualnej nieskończoności" (s. 46). Między innymi, właśnie dzięki tego rodzaju bazie teoria mnogości mogła tyle osiągnąć w podstawach matematyki.

Inne swoje oblicze nieskończoność ukazuje w matematycznej teorii *kontinuum*. Weyl wyjaśnia, co ma przez to na myśli, gdy mówi, że szczególnymi przypadkami kontinuum są przestrzeń i czas. Dziś wyrażenie *kontinuum*, w tym znaczeniu, jest nieco przestarzałe; mówi się raczej, że czas i przestrzeń mają własności rozmaitości różniczkowych (ściślej: są przez rozmaitości różniczkowe modelowane). Zresztą warto przypomnieć, że to właśnie Weyl niemało przyczynił się do utworzenia dzisiejszego pojęcia rozmaitości różniczkowej. Ale pozostańmy na razie przy uświęconym tradycją terminie *kontinuum* (Einstein, mówiąc o czasoprzestrzeni, używał tego terminu).

Zdaniem Weyla istotę *kontinuum* oddaje cytat przypisywany Anaksagorasowi: „Wśród małych nie ma najmniejszych, ale zawsze jeszcze coś mniejszego. Ponieważ to, co jest, nie może przestać być, niezależnie od tego, jak daleko jest dzielone na coraz mniejsze części" (s. 41). Dzięki tej własności, że przestrzeń jest nieskończona nie tylko wówczas, gdy rozciąga się nieograniczenie ("do nieskończoności"); „przestrzeń jest nieskończona w każdym miejscu, niejako do wewnątrz, w tym sensie, że każdy punkt tej przestrzeni może być umiejscowiony jedynie w procesie podziału, krok po kroku, postępującym ad infinitum" (s. 41). Weyl dalej zauważa, że własność ta pozostaje w sprzeczności z potocznym poglądem, który skłania nas do traktowania przestrzeni jako czegoś kompletnego i pozostającego w bezruchu ("resting and complete"). Przestrzeń — wbrew potocznym intuicjom — nie jest „całością daną równocześnie"; analiza przestrzeni wymaga nieskończonego, choć zbieżnego, procesu „dochodzenia do punktu".

Ponieważ świat badany przez fizykę istnieje w przestrzennym *kontinuum*, własność „niewyczerpalności" przestrzeni przenosi się na przedmioty fizyczne. Rzeczywisty przedmiot nigdy nie może być dany adekwatnie, jego 'wewnętrzny horyzont' w nieskończonym procesie zdobywania ciągle nowych i ciągle dokładniejszych doświadczeń [...] Z tego powodu rzeczywisty przedmiot nie może być dany, raz na zawsze, jako istniejący, zamknięty i zupełny w sobie" (s. 41). Leibniz przyznawał, że to właśnie tego rodzaju niewyczerpalność *kontinuum* skłoniła go do poglądu, te ostatecznymi składnikami rzeczywistości są niepodzielne monady. Oto tekst Leibniza, na który powołuje się Weyl: „W bycie idealnym czyli kontinuum całość wyprzedza części [...] Części są tylko potencjalne, natomiast w przedmiotach rzeczywistych to, co proste, wyprzedza to, co złożone a części są dane aktualnie i wyprzedzają całość. Rozważania te rozpraszają trudności dotyczące kontinuum, trudności, które powstają, gdy kontinuum uważa się za coś rzeczywistego, co ma rzeczywiste części jeszcze zanim podział — jakikolwiek byśmy zaprojektowali — został dokonany i gdy materię traktujemy jako substancje" (s. 41). Zresztą już znacznie wcześniej Zenon z Elei borykał się z tymi samymi trudnościami!

Podobne uwagi dotyczą kontinuum czasowego. I tu historia filozofii wikłała się w paradoksy. Pierwsza Kantowska antynomia czystego rozumu polega na udowodnieniu dwóch sprzecznych ze sobą tez, a mianowicie: (1) „Świat posiada początek w czasie" oraz (2) „Świat nie ma początku..."[3]. Dowód pierwszej z tych tez przebiega następująco: „Jeżeli bowiem przyjmiemy, że świat nie posiada początku w czasie, to aż do każdej danej chwili upłynęła wieczność, a tym samym upłynął nieskończony szereg następujących po sobie stanów rzeczy w świecie. Lecz oto nieskończoność szeregu polega właśnie na tym, że nie może być nigdy do końca doprowadzony za pomocą syntezy kolejno przeprowadzanej. Nie jest więc możliwy nieskończony miniony szereg światowy, początek świata stanowi przeto konieczny warunek jego istnienia. To zaś należało przede wszystkim udowodnić"[4]. Weyl rozprawia się z tym „dowodem" krótką uwaga w przypisie 7 na stronie 42. Stwierdza on mianowicie, że argument Kanta nie dowodzi, że świat miał początek, lecz te pomiędzy dowolną chwilą istnienia świata a jego początkiem rozciąga się nieskończony ciąg chwil (lub, jak mówi Kant, stanów rzeczy). Ale ponieważ czas jest kontinuum, to samo jest słuszne w odniesieniu do każdych dwóch, różnych od siebie, chwil[5].

---

[3] I. Kant, *Krytyka czystego rozumu*, tom II, przekł. R. Ingarden, Bibl. Klasyków Fil., PWN, 1957, s. 184. Teza i antyteza Kanta, w drugiej części, mówią jeszcze o przestrzennej skończoności (teza) i nieskończoności (antyteza) świata.

[4] Tamże, s. 165.

[5] Tego rodzaju błędne rozumowania niekiedy odżywają, por. argumentację K. Kłósaka za czasowym początkiem świata: *W poszukiwaniu Pierwszej Przyczyny* Pax, Warszawa 1955, ss. 68–93. O ile mi wiadomo, potem Ks. Kłósak ten „dowód" odwołał.

4. Lokalna i globalna struktura czasoprzestrzeni

Zdążyliśmy już zauważyć, że Weyl nie na długo pozostaje w sferze czystej matematyki. Zbyt go frapuje zagadnienie stosunku matematyki do fizycznego świata. W trakcie lektury tekstów Weyla łatwo zauważyć, iż nie jest on daleki od przekonania, te właśnie w rozważaniu kwestii stosunku matematyki do świata może leżeć klucz, lub przynajmniej cenna wskazówka, do zrozumienia natury poznania matematycznego. Na koniec tych, zresztą wyrywkowych, refleksji „na marginesie lektury" chciałbym skupić uwagę nad dwiema dygresjami Weyla na temat pewnych zagadnień związanych z zastosowaniem matematyki do opisu fizycznego świata. Pierwsza z tych dygresji dotyczy bardziej szczegółowej, choć o doniosłym znaczeniu dla fizyki teoretycznej, kwestii, druga dotyczy problemu o ogólnometodologicznym znaczeniu.

Jak wiadomo, fundamentalnym pojęciem współczesnej geometrii różniczkowej jest n–wymiarowa rozmaitość różniczkowa. Pojęcie to, zalążkowo znajdujące się już w słynnej pracy Riemanna *O podstawach geometrii*, zostało w pełni sformalizowane w latach trzydziestych przez Whitney'a, ale praktycznie już Weyl posiada i w pełni wykorzystuje (por. ss. 78–91). Doniosłość tego pojęcia dla fizyki polega na tym, że 4–wymiarowa rozmaitość różniczkowa modeluje czasoprzestrzeń, a czasoprzestrzeń, z kolei, jest sceną na której rozgrywają się wszystkie procesy (makroskopowej) fizyki[6]. Z ogólną teorią względności, która jest teorią czasoprzestrzeni i grawitacji, wiąże się tzw. zasada Macha. Mówiąc najogólniej jest to postulat domagający się, by lokalne własności czasoprzestrzeni były jednoznacznie określone przez jej globalną strukturę, np. przez rozkład materii w czasoprzestrzeni. Spory wokół zasady Macha mają bardzo długą historię i ciągle jeszcze inspirują wiele aktualnych badań w fizyce relatywistycznej[7]. W trakcie dyskusji zwrócono uwagę, że pewne elementy „anty–machowskie" kryją się w samym pojęciu rozmaitości: n–wymiarowa rozmaitość różniczkowa lokalnie musi mieć wszystkie własności topologiczne i różniczkowe takie same jak n–wymiarowa

[6] Na temat rozmaitości różniczkowej jako modelu czasoprzestrzeni por. np. moje artykuły: *Matematyczny model czasoprzestrzeni*, „Roczniki Filozoficzne" (KUL), 23, 2.3, 1975, 21–36; *The Manifold Model for Space–Time*, „Acta Cosmologica", 10, 1981, 33–51; *Relativistic Model for Space–Time*, ibid., 10, 1981, 53–69.

[7] Obszerniej por. J. D. Raine, M. Heller, *The Science of Space–Time*, Pachart, Tucson 1981.

przestrzeń Euklidesowa, niezależnie od jakichkolwiek swoich własności globalnych[8].

Weyl niezwykle jasno dostrzegł cały problem. Zgodnie z zasadami ogólnej teorii względności, globalnie czasoprzestrzeń może mieć bardzo różną geometryczną strukturę ale w „małym lokalnym otoczeniu" czasoprzestrzeń musi być zawsze taka jak w szczególnej teorii względności (ściślej: przestrzeń styczna do czasoprzestrzeni zawsze musi być przestrzenią Minkowskiego). W tym sensie — powiada Weyl — „nie ma miejsca na żadną nieokreśloność i możemy więc powiedzieć, że natura metryki jest taka sama w każdym punkcie" (s. 87, podkreślenia Weyla). W takim znaczeniu, i jedynie w takim znaczeniu, globalna struktura czasoprzestrzeni nie ma wpływu na jej strukturę lokalną. Nie jest jednak prawdą, że globalna struktura nie może zupełnie wpływać na to, co dzieje się w „małym otoczeniu", a mianowicie może ona wpływać na swojego rodzaju „orientację' lokalnych układów współrzędnych (wyraz „orientncja" jest tu użyty obrazowo, nie w technicznym znaczeniu używanym w topologii czy geometrii różniczkowej). Układ współrzędnych, w którym metryka przyjmuje standardową postać metryki szczególnej teorii względności (metryka Minkowskiego), ma swoistą „orientację" w stosunku do całości i „orientacja" ta może zmieniać się od miejsca do miejsca.

Weyl wyjaśnia: „Używamy analogicznego wyrażenia w geometrii Euklidesa, gdy mówimy, że różne sześciany (o danych rozmiarach) są tej samej natury, różnią się jedynie swoją orientacją. Natura metryki jest jedna i dana absolutnie; tylko wzajemna orientacja (układów współrzędnych) w różnych punktach może ulegać ciągłym zmianom i w zależności od rozkładu materii (w czasoprzestrzeni). Przestrzeń Euklidesa można porównać do kryształu, utworzonego z takich samych, niezmiennych atomów, ułożonych w regularną i niezmienną sieć; przestrzeń Riemanna można porównać do cieczy, składającej się z takich samych, nierozróżnialnych i niezmiennych atomów, których ułożenie i orientacja jest jednak ruchome i zależne od sił działających na nie" (s. 87–88). Te głębokie, choć niemal oczywiste, uwagi powinien przemyśleć każdy, kto zastanawia się nad problemem Macha w ogólnej teorii względności.

[8]Por. ibid., s. 227 i nast.

5. Z dokładnością do izomorfizmu

Druga dygresja, dotycząca zastosowania matematyki do analizy i opisu przyrody jest tyle prosta co i głęboka. Wiąże się ona z pojęciem izomorfizmu.

Rozważmy pewien układ S_1 przedmiotów, pomiędzy którymi zachodzą relacje $R_1^{'}, R_1^{''}, ...$ Niech także będzie dany inny układ S_2 przedmiotów i relacji $R_2^{'}, R_2^{''}$ pomiędzy nimi. Natura przedmiotów i relacji należących do obu tych układów może być zupełnie różna. Załóżmy, że istnieje reguła, łącząca w sposób wzajemnie jednoznaczny w pary przedmioty układu S_1 z przedmiotami układu S_2 w ten sposób, że jeśli pomiędzy przedmiotami należącymi do S_1 zachodzi relacja np. R_1, to między odpowiadającymi im zdarzeniami należącymi do S_2 zachodzi relacja np. R_2 (a więc pomiędzy relacjami $R_1, R_1^{'} ... i\ R_2, R_2^{'}$ także istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie). Regułę o tych własnościach nazywamy izomorfizmem lub odwzorowaniem izomorficznym a układy S_1 i S_2 izomorficznymi.

Można orzec, że układy izomorficzne posiadają te samą strukturę. Każde twierdzenie dotyczące układu S_1, które można sformułować przy pomocy relacji $R_1, R_1^{'} ...$ jest równocześnie słuszne odnośnie układu S_2, jeżeli tylko relacje $R_1, R_1^{'}$ zastąpić relacjami $R_2, R_2^{'} ...$ i odwrotnie: każde twierdzenie dotyczące S_2 jest słuszne odnośnie S_1, przy odpowiednim zastąpieniu relacji, zupełnie niezależnie od „treści” obu zestawów relacji. Ponieważ „treść” relacji nie gra tu żadnej roli, relacjom należącym do obu zestawów możemy nadać te same nazwy np. $R, R^{'} ...$. W tym sensie zbiór wszystkich punktów w przestrzeni Euklidesa jest układem izomorficznym ze zbiorem wszystkich możliwych trójek liczb. Relacje zachodzące zarówno między punktami, jak i trójkami liczb, są prawami geometrii Euklidesa. Odkrycie tego izomorfizmu przez Kartezjusza stworzyło geometrię analityczną.

W geometrii Euklidesa nie ważna jest „natura” rozważanych przedmiotów, lecz tylko relacje, jakie pomiędzy nimi zachodzą. Geometria nie rozróżnia, czy są to punkty, czy trójki liczb. Wykładowca chcąc wskazać „naturę” obiektu, musi narysować kredą na tablicy punkt lub napisać trójkę liczb. Samej geometrii jest dokładnie obojętne, którą z tych dwu interpretacji wykładowca wybierze (w wyborze będzie się on kierować jedynie względami dydaktycznymi). Powiadamy, że geometria określa swoje przedmioty *z dokładnością do izomorfizmu.*

Są to sprawy doskonale znane i zupełnie elementarne. Ciekawy (choć w gruncie rzeczy niemal oczywisty) jest metodologiczny wniosek, jaki z nich Weyl wyprowadza. Gdy stosujemy jakąś teorię matematyczną do opisu świata fizycznego, daną dziedzinę świata możemy identyfikować z dokładnością do izomorfizmu. Jeżeli istnieje coś takiego jak „natura” czy „istota” przedmiotów, sięgamy do niej aktem bezpośredniej intuicji czy oglądu. Akt taki „wnika” w konkretny, ten a nie inny, obiekt; nie odbywa się on „z dokładnością do izomorfizmu”. Natura punktu jest różna od natury układu trzech liczb, ale różnice te chwytamy bezpośrednim oglądem punktu lub trójki liczb. Opis matematyczny, zawsze tylko z dokładnością do izomorfizmu, ogranicza się do układu relacji pomiędzy przedmiotami, nie interesując się „prawdziwą naturą” tych przedmiotów. I właśnie dlatego poznanie w zmatematyzowanych naukach przyrodniczych jest tylko *fenomenatistyczne* czyli *zjawiskowe* a nigdy *istotowe*. Fakt ten stanowi proste następstwo stosowania matematyki do opisu przyrody. Nie jest to więc „opis zewnętrzny”, nie naruszający samego opisywanego przedmiotu; opis matematyczny równocześnie ten przedmiot preparuje. Matematyka okazuje się skutecznym, ale i brutalnym narzędziem opisu świata. (Por. ss. 25–27).

6. Konstrukcje i obrazy idei

W przedmowie napisanej w r. 1947 do *Philosophy of Mathematics and Natural Science* Weyl wyznaje, że w miarę upływania lat stał się bardziej ostrożny, gdy idzie o wyciąganie metafizycznych wniosków z nauki i jej rozwoju. Nic dziwnego, wszak były to lata przemożnych wpływów neopozytywizmu i silnych tendencji antyfilozoficznych. Lecz Weyl jest zbyt głębokim myślicielem, by poddać się modnym prądom. „Ale jednak — pisze dalej — nauka zginęłaby bez wsparcia ze strony wiary w prawdę i rzeczywistość, bez nieustannego rezonansu pomiędzy faktami i konstrukcjami z jednej strony a obrazami idei z drugiej” (s. VI). Jest to rodzaj wyznania wiary myśliciela; wiary, która profesję uczonego zamienia w Wielką Przygodę życia.